



Liga Zadaniowa, Edycja I, Seria 1, Rozwiązania

Zadanie 111. Dowieść, że nie istnieje liczba naturalna, której kwadrat ma w zapisie dziesiętnym 45 cyfr, gdzie każda z cyfr dziesiętnych $c = 1, 2, 3, \dots, 9$ występuje dokładnie c razy.

Rozwiązanie:

Suma cyfr opisanej w treści zadania liczby 45-cyfrowej jest równa

$$\sum_{c=1}^9 c^2 = \frac{9 \cdot (9+1) \cdot (2 \cdot 9 + 1)}{6} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 3 \cdot 5 \cdot 19,$$

jest więc podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9.

Tymczasem kwadrat dowolnej liczby całkowitej, jeżeli jest podzielny przez 3, to jest także podzielny przez 9.

Zatem opisana w zadaniu liczba 45-cyfrowa nie może być kwadratem liczby całkowitej.

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy wzór na sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do n :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Zadanie 112. Wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze p , że liczba $2p^2 + 19$ też jest pierwsza.

Rozwiązanie:

Kwadrat dowolnej liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1.

Stąd dla dowolnej liczby p niepodzielnej przez 3, liczba $2p^2 + 19$ jest podzielna przez 3 i większa od 3, jest więc złożona.

Jedyną liczbą pierwszą, która może spełniać warunki zadania, jest $p = 3$. Wówczas liczba $2p^2 + 19 = 37$ istotnie jest pierwsza.

Odpowiedź: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $p = 3$.

Zadanie 113. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb naturalnych n, k , że liczby

$$\binom{n}{k}, \quad \binom{n}{k+1}, \quad \binom{n}{k+2}$$

tworzą rosnący postęp arytmetyczny trójwyrazowy, a ponadto są długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozwiązanie:

Oznaczmy

$$a = \binom{n}{k}, \quad b = \binom{n}{k+1}, \quad c = \binom{n}{k+2}.$$

Wówczas zgodnie z warunkami zadania $2b = a + c$ oraz $a^2 + b^2 = c^2$. Zatem

$$a^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = c^2,$$



skąd otrzymujemy kolejno

$$4a^2 + a^2 + 2ac + c^2 = 4c^2$$

$$5a^2 + 2ac - 3c^2 = 0,$$

co po podstawieniu $t = a/c$ prowadzi do równania

$$5t^2 + 2t - 3 = 0$$

mającego rozwiązania $t = -1$ oraz $t = 3/5$. Warunki zadania są spełnione tylko przez drugie z rozwiązań, które prowadzi do zależności

$$a = 3c/5, \quad b = 4c/5.$$

Wynika stąd, że warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy a, b, c będą liczbami dodatnimi pozostającymi w proporcji 3 : 4 : 5.

Ten wniosek prowadzi do następujących dwóch równań

$$\frac{4}{3} = \frac{b}{a} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot n!} = \frac{n-k}{k+1}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{c}{b} = \frac{\binom{n}{k+2}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n! \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)!}{(k+2)! \cdot (n-k-2)! \cdot n!} = \frac{n-k-1}{k+2},$$

czyli

$$\begin{cases} 4(k+1) &= 3(n-k) \\ 5(k+2) &= 4(n-k-1) \end{cases},$$

co dalej prowadzi kolejno do

$$\begin{cases} 4k+4 &= 3n-3k \\ 5k+10 &= 4n-4k-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7k+4 &= 3n \\ 9k+14 &= 4n \end{cases}$$

$$4(7k+4) = 12n = 3(9k+14)$$

$$28k+16 = 27k+42$$

$$k = 26$$

$$n = \frac{7k+4}{3} = 62.$$

Odpowiedź: Jediną parą liczb spełniających warunki zadania jest para $n = 62, k = 26$.

Zadanie 114. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+6}{n} < 10 \cdot 7^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.



Dla $n = 1$ mamy $\binom{3n+6}{n} = 9$ oraz $10 \cdot 7^{n-1} = 10$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $9 < 10$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{3n+6}{n} < 10 \cdot 7^{n-1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{3n+9}{n+1} < 10 \cdot 7^n.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{3n+9}{n+1} &= \frac{(3n+9)!}{(n+1)! \cdot (2n+8)!} = \frac{(3n+9) \cdot (3n+8) \cdot (3n+7) \cdot (3n+6)!}{(n+1) \cdot n! \cdot (2n+8) \cdot (2n+7) \cdot (2n+6)!} = \\ &= \frac{(3n+9) \cdot (3n+8) \cdot (3n+7)}{(n+1) \cdot (2n+8) \cdot (2n+7)} \cdot \binom{3n+6}{n} < \frac{(3n+9) \cdot (3n+8) \cdot (3n+7)}{(n+1) \cdot (2n+8) \cdot (2n+7)} \cdot 10 \cdot 7^{n-1} \leq \\ &\leq 7 \cdot 10 \cdot 7^{n-1} = 10 \cdot 7^n, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(3n+9) \cdot (3n+8) \cdot (3n+7)}{(n+1) \cdot (2n+8) \cdot (2n+7)} \leq 7.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$(3n+9) \cdot (3n+8) \cdot (3n+7) \leq 7 \cdot (n+1) \cdot (2n+8) \cdot (2n+7),$$

co kolejno przekształca się do

$$\begin{aligned} 27n^3 + 216n^2 + 573n + 504 &\leq 28n^3 + 238n^2 + 602n + 392, \\ 112 &\leq n^3 + 22n^2 + 29n. \end{aligned}$$

Dla $n = 1$ powyższa nierówność przyjmuje postać $112 \leq 52$, jest więc fałszywa.

Z kolei dla $n = 2$ otrzymujemy $112 \leq 154$, co dowodzi prawdziwości nierówności dla $n = 2$. Ponieważ prawa strona nierówności w oczywisty sposób rośnie wraz ze wzrostem n , nierówność jest prawdziwa dla każdego $n \geq 2$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 2$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$. Sprawdzenie to okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$\binom{12}{2} = 66 < 70 = 10 \cdot 7^1.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$.

Uwaga:

Sprawdzenie dla $n = 2$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.



Zadanie 115. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_{(3+\sqrt{8})}(7+\sqrt{50})$ jest wymierna czy niewymierna.

Rozwiązanie:

Korzystając z równości

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2 \cdot \sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{8}$$

oraz

$$(1+\sqrt{2})^3 = 1 + 3 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2} = 7 + \sqrt{50}$$

otrzymujemy

$$\log_{(3+\sqrt{8})}(7+\sqrt{50}) = \frac{3}{2}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest wymierna, gdyż jest równa $3/2$.