



Liga Zadaniowa, Edycja I, Seria 4 (waga 2), Rozwiązania

Zadanie 141. Wyznaczyć największy wspólny dzielnik liczb $6n-1$ oraz $n+6$ w zależności od liczby całkowitej dodatniej n .

Rozwiązanie:

Każdy wspólny dzielnik liczb $6n-1$ oraz $n+6$ jest także dzielnikiem liczby

$$6 \cdot (n+6) - (6n-1) = 37,$$

co wobec pierwszości liczby 37 pokazuje, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\text{NWD}(6n-1, n+6)$ jest równa 1 lub 37.

Liczba $n+6$ jest podzielna przez 37 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n przy dzieleniu przez 37 daje resztę 31. Wtedy również liczba $6n-1$ jest podzielna przez 37, gdyż

$$6n-1 \equiv 6 \cdot 31 - 1 = 185 \equiv 0 \pmod{37}.$$

Odpowiedź: Największy wspólny dzielnik podanych liczb jest równy 37, gdy n przy dzieleniu przez 37 daje resztę 31, a w pozostałych przypadkach jest równy 1.

Zadanie 142. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których prawdziwe jest następujące zdanie:

W dowolnym postępie geometrycznym n -wyrazowym (o wyrazach rzeczywistych) o iloczynie wyrazów równym -1 , co najmniej jeden z wyrazów jest równy -1 .

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy trzy przypadki:

1° Liczba n jest nieparzysta.

Z równości

$$\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1^n q^{n(n-1)/2} = (a_1 q^{(n-1)/2})^n = a_{(n+1)/2}^n$$

wynika, że iloczyn wyrazów postępu geometrycznego jest równy n -tej potędze wyrazu środkowego. Jeżeli iloczyn ten jest równy -1 , to $a_{(n+1)/2}^n = -1$, skąd $a_{(n+1)/2} = -1$. Co więcej, iloczyn wyrazów postępu geometrycznego jest równy -1 wtedy i tylko wtedy, gdy środkowy wyraz jest równy -1 .

W tym przypadku zdanie podane w treści zadania jest więc prawdziwe.

2° Liczba n jest parzysta i niepodzielna przez 4.

W przypadku, gdy n jest liczbą parzystą

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1^n q^{n(n-1)/2} = (a_1^2 q^{n-1})^{n/2} = (a_{n/2} \cdot a_{n/2+1})^{n/2},$$

czyli iloczyn wyrazów postępu geometrycznego jest równy iloczynowi dwóch wyrazów środkowych w potęgę $n/2$.

Jeżeli liczba $n/2$ jest nieparzysta, to iloczyn wyrazów postępu geometrycznego jest równy -1 wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn dwóch środkowych wyrazów jest równy -1 . To pozwala skonstruować przykład postępu geometrycznego o iloczynie wyrazów równym -1 niezawierającego wyrazu -1 .



Przyjmijmy

$$a_{n/2} = \frac{-1}{2} \quad \text{oraz} \quad a_{n/2+1} = 2,$$

co prowadzi do postępu geometrycznego określonego wzorem

$$a_k = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \cdot (-4)^{k-1}.$$

Postęp ten nie zawiera wyrazu -1 , a iloczyn jego wyrazów jest równy -1 .

Zatem w tym przypadku zdanie podane w treści zadania jest fałszywe.

3° Liczba n jest podzielna przez 4.

Z udowodnionego w poprzednim przypadku wzoru

$$\prod_{k=1}^n a_k = (a_{n/2} \cdot a_{n/2+1})^{n/2}$$

oraz parzystości liczby $n/2$ wynika, że w tym przypadku iloczyn wyrazów postępu geometrycznego nie może być liczbą ujemną. Nie istnieją więc postępy geometryczne o iloczynie wyrazów równym -1 , a co za tym idzie każde zdanie postaci *W dowolnym postępie geometrycznym n -wyrazowym o iloczynie wyrazów równym -1* jest prawdziwe, chociaż nie jest specjalnie ciekawe, bo jest spełnione w próżni.

Tak więc tym przypadku zdanie podane w treści zadania jest prawdziwe.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają liczby nieparzyste oraz liczby podzielne przez 4.

Zadanie 143. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie wzorami

$$a_1 = 1000000, \quad a_2 = 2000005, \quad a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wyznaczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy indukcyjnie, że ciąg (a_n) jest określony wzorem

$$a_n = 1000001 \cdot 2^{n-1} - (-3)^{n-1}.$$

Sprawdzamy bezpośrednio, że

$$a_1 = 1000001 \cdot 2^0 - (-3)^0 = 1000001 - 1 = 1000000$$

oraz

$$a_2 = 1000001 \cdot 2^1 - (-3)^1 = 2000002 + 3 = 2000005.$$

Niech teraz $n \geq 2$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$a_k = 1000001 \cdot 2^{k-1} - (-3)^{k-1} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n. \quad (\spadesuit)$$

Wówczas

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6a_{n-1} - a_n = 6(1000001 \cdot 2^{n-2} - (-3)^{n-2}) - (1000001 \cdot 2^{n-1} - (-3)^{n-1}) = \\ &= (6 \cdot 1 - 2) \cdot 1000001 \cdot 2^{n-2} - (6 - (-3)) \cdot (-3)^{n-2} = 4 \cdot 1000001 \cdot 2^{n-2} - 9 \cdot (-3)^{n-2} = \\ &= 1000001 \cdot 2^n - (-3)^n, \end{aligned}$$



skąd wynika, że wzór (♠) jest prawdziwy również dla $k = n + 1$, co kończy dowód indukcyjny.

Możemy teraz przystąpić do obliczenia granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000001 \cdot 2^n - (-3)^n}{1000001 \cdot 2^{n-1} - (-3)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000001 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3}{1000001 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1} = \frac{0-3}{0+1} = -3.$$

Odpowiedź: Granica podana w zadaniu istnieje i ma wartość -3 .

Uwaga:

Aby znaleźć podany wyżej wzór na a_n , najpierw szukamy ciągów geometrycznych (q^{n-1}) spełniających daną w zadaniu rekurencję, co prowadzi nas do $q_1 = 2$ oraz $q_2 = -3$, a następnie dobieramy tak stałe c_1 i c_2 , aby otrzymać poprawne wartości a_1 i a_2 przy założeniu

$$a_n = c_1 \cdot q_1^{n-1} + c_2 \cdot q_2^{n-1}.$$

Zadanie 144. Rozwiązać równanie

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2012$$

w liczbach całkowitych x, y, z .

Rozwiązanie:

Z równości

$$(3n)^3 = 9 \cdot (3n^3)$$

oraz

$$(3n \pm 1)^3 = 9 \cdot (3n^3 \pm n^2 + n) \pm 1$$

wynika, że sześcián liczby całkowitej przy dzieleniu przez 9 może dawać tylko jedną z reszt 0,1,8.

W konsekwencji suma trzech sześciánów przy dzieleniu przez 9 daje jedną z reszt 0,1,2,3,6,7,8.

Ponieważ liczba 2012 daje przy dzieleniu przez 9 resztę $2+0+1+2=5$, nie jest ona sumą trzech sześciánów liczb całkowitych.

Odpowiedź: Podane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

Zadanie 145. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d, e, f spełniają równania

$$a + b + c + d + e + f = 6$$

oraz

$$ab + bc + cd + de + ef + fa + ad + be + cf + \\ + abc + bcd + cde + def + efa + fab + ace + bdf = 17.$$

Dowieść, że

$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2.$$

Rozwiązanie:



Niech a, b, c, d, e, f będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi równanie

$$a + b + c + d + e + f = 6.$$

Zauważmy, że zachodzi równość

$$ab + bc + cd + de + ef + fa + ad + be + cf = (a + c + e) \cdot (b + d + f),$$

a ponadto z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną wynika nierówność

$$(a + c + e) \cdot (b + d + f) \leq \left(\frac{(a + c + e) + (b + d + f)}{2} \right)^2 = 9,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a + c + e = b + d + f = 3.$$

Podobnie, zachodzi równość

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab + ace + bdf = (a + d) \cdot (b + e) \cdot (c + f),$$

a z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną wynika nierówność

$$(a + d) \cdot (b + e) \cdot (c + f) \leq \left(\frac{(a + d) + (b + e) + (c + f)}{3} \right)^3 = 8,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a + d = b + e = c + f = 2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} & ab + bc + cd + de + ef + fa + ad + be + cf + \\ & + abc + bcd + cde + def + efa + fab + ace + bdf \leq 17, \end{aligned}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a + c + e = b + d + f = 3 \quad \text{oraz} \quad a + d = b + e = c + f = 2.$$

Oznaczmy $x = a - 1$ oraz $y = c - 1$. Wówczas

$$a = 1 + x, \quad c = 1 + y, \quad d = 1 - x, \quad f = 1 - y, \quad e = 1 - x - y, \quad b = 1 + x + y.$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 + e^2 &= (1 + x)^2 + (1 + y)^2 + (1 - x - y)^2 = \\ &= 1 + 2x + x^2 + 1 + 2y + y^2 + 1 - 2x - 2y + x^2 + 2xy + y^2 = 3 + 2 \cdot (x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} b^2 + d^2 + f^2 &= (1 + x + y)^2 + (1 - x)^2 + (1 - y)^2 = \\ &= 1 + 2x + 2y + x^2 + 2xy + y^2 + 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 = 3 + 2 \cdot (x^2 + xy + y^2), \end{aligned}$$

co kończy dowód równości

$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2.$$