Liga Zadaniowa, Edycja I, Seria 6 (waga 3), Rozwiązania

Zadanie 161. Dane są takie liczby naturalne a, b, c, d, e, że każda z pięciu sum $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$, $e+a$ jest podzielna przez 1001. Czy stąd wynika, że każda z liczb a, b, c, d, e jest podzielna przez 1001 ?

Rozwiązanie:

Z równości

$$(a+b)-(b+c)+(c+d)-(d+e)+(e+a)=2a$$

wynika, że liczba $2a$ jest podzielna przez 1001, a ponieważ liczba 1001 jest nieparzysta, także liczba a jest podzielna przez 1001.

Ponieważ liczba a oraz suma $a+b$ są podzielne przez 1001, także liczba $b=(a+b)-a$ jest podzielna przez 1001. Analogicznie wnioskujemy, że liczby c, d, e są podzielne przez 1001.

Odpowiedź: Tak, możemy wywnioskować, że każda z liczb a, b, c, d, e jest podzielna przez 1001.

Zadanie 162. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze postaci $(n+1)^n-4$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1.

Rozwiązanie:

Rozważymy dwa przypadki.

1° Liczba n jest nieparzysta. Wówczas liczba $n+1$ jest parzysta, a w konsekwencji liczba $(n+1)^n-4$ jest parzysta. Przy tym $n\geqslant 3$, skąd $(n+1)^n-4\geqslant 4^3-4=60>2$. Zatem liczba ta jest złożona jako liczba parzysta większa od 2.

2° Liczba n jest parzysta. Oznaczmy $n=2k$. Mamy wówczas

$$(n+1)^n-4=(2k+1)^{2k}-2^2=\left((2k+1)^k-2\right)\cdot\left((2k+1)^k+2\right),$$

co ma szansę być liczbą pierwszą tylko wtedy, gdy $(2k+1)^k-2=1$. Sprawdzamy, że dla $k=1$ istotnie zachodzi równość $(2k+1)^k-2=1$, a przy tym liczba $(2k+1)^k+2=5$ jest pierwsza. Natomiast dla $k\geqslant 2$ zachodzi nierówność $(2k+1)^k-2\geqslant 5^2-2=23>1$.

Odpowiedź: Jedyną liczbą pierwszą zadanej postaci jest liczba 5, którą otrzymujemy dla $n=2$.

Zadanie 163. Wyznaczyć najmniejszą liczbę pierwszą p, dla której równanie

$$m^2+p=2^n$$

ma co najmniej trzy rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

Rozwiązanie:

Ponieważ lewa strona równania rośnie wraz z m, a prawa rośnie wraz z n, równanie nie może mieć dwóch rozwiązań z tą samą liczbą n i różnymi liczbami m.

Jeśli więc istnieją co najmniej trzy rozwiązania, to istnieje co najmniej jedno rozwiązanie, w którym $n\geqslant 3$.

Wówczas liczba m^2+p jest podzielna przez 8. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 8 może dawać tylko jedną z reszt 0, 1, 4, liczba p może dawać

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

odpowiednio jedną z reszt 0, 7, 4. Liczba dająca przy dzieleniu przez 8 resztę 0 lub 4 jest podzielna przez 4, nie może więc być pierwsza. Stąd wynika, że liczba p przy dzieleniu przez 8 daje resztę 7.

Pozostaje rozstrzygnąć, czy dane równanie ma co najmniej trzy rozwiązania dla $p=7$. Bez trudu znajdujemy następujące trzy rozwiązania (m,n): $(1,3)$, $(3,4)$ oraz $(5,5)$. Rozwiązaniami są też $(11,7)$ oraz $(181,15)$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $p=7$.

Zadanie 164. Interesują nas takie pary liczb całkowitych dodatnich (m,n), że liczba $\mathrm{NWW}(m,n)$ jest większa o $(m+n)\%$ od liczby $\mathrm{NWD}(m,n)$.

Rozstrzygnąć, czy:

a) takie pary (m,n) nie istnieją,

b) takie pary (m,n) istnieją, ale jest ich skończenie wiele,

c) takich par (m,n) jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że liczby m, n spełniają warunki zadania.

Ponieważ najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest wielokrotnością ich największego wspólnego dzielnika, istnieje taka liczba naturalna $k>1$, że $\mathrm{NWW}(m,n)=k\cdot\mathrm{NWD}(m,n)$. Wówczas liczba liczba $\mathrm{NWW}(m,n)$ jest większa od liczby $\mathrm{NWD}(m,n)$ o $100(k-1)\%$, skąd

$$m+n=100(k-1)\,.$$

Oznaczmy liczbę $\mathrm{NWD}(m,n)$ przez d i niech $a=m/d$ oraz $b=n/d$, czyli $m=ad$ oraz $n=bd$. Wówczas liczby a i b są względnie pierwsze, a w konsekwencji $\mathrm{NWW}(m,n)=abd$, skąd $k=ab$.

Równość $m+n=100(k-1)$ przybiera postać

$$(a+b)d=100(ab-1)\,.$$

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia liczby takich par względnie pierwszych liczb naturalnych (a,b), że liczba $100(ab-1)$ jest podzielna przez $a+b$.

Takich par liczb jest nieskończenie wiele, wystarczy bowiem przyjąć

$$b=a^2-a+1\,.$$

Wówczas

$$a+b=a^2+1$$

oraz

$$ab-1=a\cdot\left(a^2-a+1\right)-1=a^3-a^2+a-1=(a-1)\cdot\left(a^2+1\right)\,,$$

skąd wynika, że w tym wypadku nawet liczba $ab-1$ jest podzielna przez $a+b$.

Odpowiedź: Istnieje nieskończenie wiele par liczb spełniających warunki zadania.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 165. Rozwiązać nierówność

$$\log_3\log_9 x < \log_9\log_3 x$$

w liczbach rzeczywistych x.

Rozwiązanie:

Rozwiązanie rozpoczniemy od wyznaczenia dziedziny nierówności.

Lewa strona nierówności jest określona, gdy $\log_9 x > 0$, czyli $x > 1$.

Podobnie, prawa strona nierówności jest określona, gdy $\log_3 x > 0$, czyli $x > 1$.

Zatem dziedziną nierówności jest przedział $(1, \infty)$.

Przyjmijmy oznaczenie

$$y = \log_3 x$$

zauważając, że gdy x przebiega dziedzinę nierówności, y jest poprawnie określone i przebiega zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Wówczas

$$x = 3^y$$

i dana w zadaniu nierówność przekształca się kolejno do:

$$\log_3\log_9 3^y < \log_9\log_3 3^y$$

$$\log_3\frac{y}{2} < \log_9 y$$

$$\log_3 y - \log_3 2 < \frac{\log_3 y}{2}$$

$$\log_3 y - \frac{\log_3 y}{2} < \log_3 2$$

$$\frac{\log_3 y}{2} < \log_3 2$$

$$\log_3 y < 2 \cdot \log_3 2$$

$$\log_3 y < \log_3 4$$

$$y < 4$$

$$3^y < 3^4$$

$$x < 81\,.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(1, 81)$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego