



Liga Zadaniowa, Edycja II, Seria 2, Rozwiązania

Zadanie 221. Wyznaczyć wszystkie pary (a, n) , gdzie a jest liczbą rzeczywistą, a n liczbą naturalną, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\}^n - 3 \cdot \{x\}^{2012} + \{x\}$$

jest różniczkowalna.

Uwaga: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

Rozwiązanie:

Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w punktach niecałkowitych, a ponadto jest okresowa z okresem 1. Wystarczy więc zbadać jej różniczkowalność w punkcie 1.

Aby funkcja była różniczkowalna w tym punkcie, musi być ciągła, czyli muszą być równe granice jednostronne i wartość w punkcie 1:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= a - 3 + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= f(1) = 0,\end{aligned}$$

skąd otrzymujemy $a = 2$ jako warunek konieczny i dostateczny ciągłości funkcji f .

Zatem

$$f(x) = 2 \cdot \{x\}^n - 3 \cdot \{x\}^{2012} + \{x\},$$

skąd

$$f'(x) = 2n \cdot \{x\}^{n-1} - 3 \cdot 2012 \cdot \{x\}^{2011} + 1 = 2n \cdot \{x\}^{n-1} - 6036 \cdot \{x\}^{2011} + 1,$$

przy czym powyższy wzór określa pochodną w punktach niecałkowitych, natomiast wstawienie w miejsce $\{x\}$ liczby 0 lub 1 daje odpowiednio wartość pochodnej prawostronnej i lewostronnej w punktach całkowitych:

$$\begin{aligned}f'(1^+) &= 1 \\ f'(1^-) &= 2n - 6036 + 1.\end{aligned}$$

Funkcja f jest więc różniczkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy pochodne jednostronne są równe, czyli $2n - 6036 = 0$, co daje $n = 3018$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia tylko para liczb $a = 2$, $n = 3018$.

Zadanie 222. Wyznaczyć kres górny zbioru wszystkich liczb postaci $ab + bc + cd + da$, gdzie a, b, c, d przebiegają wszystkie czwórki liczb rzeczywistych spełniających warunek $a + b + c + d = 4$.

Rozwiązanie:

Dla $a = b = c = d = 1$ mamy $ab + bc + cd + da = 4$, zatem liczba 4 jest elementem zbioru danego w treści zadania.

Niech teraz a, b, c, d będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a + b + c + d = 4$.

Oznaczmy $x = a + c$ oraz $y = b + d$. Wówczas $x + y = 4$ oraz $ab + bc + cd + da = xy$.

Korzystając z nierówności

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$



oraz z równości

$$16 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

otrzymujemy

$$4xy = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) \leq 16,$$

skąd

$$xy \leq 4.$$

Zatem wszystkie elementy danego w zadaniu zbioru są nie większe od 4, skąd liczba 4 jest największym elementem tego zbioru, a w konsekwencji także jego kresem górnym.

Odpowiedź: Kres górny danego w zadaniu zbioru jest równy 4.

Zadanie 223. Wyznaczyć kres górny zbioru wszystkich liczb postaci

$$ab + bc + cd + de + ea,$$

gdzie a, b, c, d, e przebiegają wszystkie piątki liczb rzeczywistych dodatnich spełniających warunek $a + b + c + d + e = 5$.

Rozwiązanie:

Niech teraz a, b, c, d, e będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunek $a + b + c + d + e = 5$.

Bez szkody dla ogólności rozwiązania możemy założyć, że najmniejszą z tych liczb jest e .

Wówczas $ae \leq ad < ad + be$, skąd

$$ab + bc + cd + de + ea < ab + bc + cd + de + ad + be = (a + c + e)(b + d).$$

Oznaczmy $x = a + c + e$ oraz $y = b + d$. Wówczas $x + y = 5$ oraz

$$ab + bc + cd + de + ea < xy.$$

Korzystając z nierówności

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

oraz z równości

$$25 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

otrzymujemy

$$4xy = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) \leq 25,$$

skąd

$$xy \leq \frac{25}{4}.$$

Zatem wszystkie elementy danego w zadaniu zbioru są mniejsze od $25/4$.

Aby udowodnić, że liczba $25/4$ jest kresem górnym danego w zadaniu zbioru, pozostaje wykazać, że zbiór ten zawiera liczby dowolnie bliskie liczbie $25/4$.

W tym celu dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ przyjmijmy

$$a = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{5}{2} - \frac{3}{n}, \quad c = d = e = \frac{1}{n}.$$



Wówczas

$$ab + bc + cd + de + ea = \frac{25}{4} - \frac{15}{2n} + \frac{5}{2n} - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{5}{2n} = \frac{25}{4} - \frac{5}{2n} - \frac{1}{n^2},$$

co przy $n \rightarrow \infty$ dąży do $25/4$.

Odpowiedź: Kres górny danego w zadaniu zbioru jest równy $25/4 = 6.25$.

Zadanie 224. Wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze p , że liczba $p^4 + 2500$ też jest pierwsza.

Rozwiązanie:

Korzystając z tożsamości

$$n^4 + 2500 = (n^2 + 10n + 50) \cdot (n^2 - 10n + 50) = ((n+5)^2 + 25) \cdot ((n-5)^2 + 25),$$

gdzie w ostatnim iloczynie obydwie czynniki są większe od 1, wnioskujemy, że liczba $n^4 + 2500$ jest złożona dla każdej liczby naturalnej n , a w szczególności jest złożona dla każdej liczby pierwszej n .

Odpowiedź: Nie istnieją liczby pierwsze spełniające warunki zadania.

Zadanie 225. Dowieść, że istnieje taka liczba wymierna w , że suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + w}{n^2(n+1)^2}$$

jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Podstawowym problemem jest obliczenie sumy szeregu postaci podanej w zadaniu.

W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}, \end{aligned}$$

co dąży do 1 przy $N \rightarrow \infty$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) &= \\ &= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(N-1)^2} - \frac{1}{N^2} \right) + \left(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{(N+1)^2}, \end{aligned}$$

co dąży do 1 przy $N \rightarrow \infty$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$



Stąd

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{n^2(n+1)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1/2}{n^2(n+1)^2}.$$

Odpowiedź: Liczbą wymierną spełniającą warunki zadania jest $w = -1/2$.