



Liga Zadaniowa, Edycja II, Seria 3, Rozwiązania

Zadanie 231. Rozwiązać równanie

$$|z - 3i| + |z - 6i| + |z - 8| + |z - 5 - 3i| = 15$$

w liczbach zespolonych z .

Rozwiązanie:

Liczba

$$|z - 3i| + |z - 5 - 3i|$$

jest sumą odległości liczby zespolonej z od liczb $3i$ oraz $5 + 3i$. Liczba ta jest większa lub równa odległości liczb $3i$ oraz $5 + 3i$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczba z należy do odcinka o końcach $3i$ oraz $5 + 3i$.

Podobnie liczba

$$|z - 6i| + |z - 8|$$

jest sumą odległości liczby zespolonej z od liczb $6i$ oraz 8 . Liczba ta jest większa lub równa odległości liczb $6i$ oraz 8 , przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczba z należy do odcinka o końcach $6i$ oraz 8 .

Zachodzą więc nierówności

$$|z - 3i| + |z - 5 - 3i| \geq 5$$

oraz

$$|z - 6i| + |z - 8| \geq 10,$$

skąd

$$|z - 3i| + |z - 6i| + |z - 8| + |z - 5 - 3i| \geq 15,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczba z należy jednocześnie do obydwu wcześniej wymienionych odcinków.

Nietrudno zauważyć, że środkiem odcinka o końcach $6i$ oraz 8 jest $4 + 3i$, co należy do odcinka o końcach $3i$ oraz $5 + 3i$ i jest to jedyny punkt wspólny tych odcinków.

Odpowiedź: Dane w zadaniu równanie ma jedno rozwiązanie zespolone $z = 4 + 3i$.

Zadanie 232. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n^2},$$

gdzie

$$a_n = \prod_{k=1}^n (8^k - 4^{k+2012}).$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dla $k = 4024$ zachodzi równość $8^k - 4^{k+2012} = 0$, dla $n \geq 4024$ mamy $a_n = 0$. Zatem szereg jest faktycznie sumą skończoną, gdyż od miejsca 4024 jego wyrazy są równe 0.

Odpowiedź: Szereg jest zbieżny na całej prostej.



Uwaga: Bezmyślne zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do błędnego wyniku $1/(2\sqrt{2})$.

Zadanie 233. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i ma ciągłą pochodną, a ponadto

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f(1) = 3, \quad f'(1) = 2.$$

Udowodnić, że istnieje taka liczba rzeczywista x , że $f(x) = f'(x)$.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję pomocniczą

$$g(x) = f(x) - f'(x).$$

Wówczas $g(0) = -1 < 0$ oraz $g(1) = 1 > 0$, a przy tym funkcja g jest ciągła. Z własności Darboux funkcji g wynika, że przyjmuje ona wartość 0, czyli istnieje takie $x \in (0, 1)$, że $g(x) = 0$, co jest równoważne równości $f(x) = f'(x)$.

Zadanie 234. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 3\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\frac{x^3 - 3x}{1 - 3x^2}$$

na przedziale $\left[-\frac{2}{5}, \frac{3}{7}\right]$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy konwencję, że argument liczby zespolonej $a + bi$, gdzie $a > 0$, dany jest wzorem

$$\operatorname{Arg}(a + bi) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

i przyjmuje wartości w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$.

W szczególności

$$\operatorname{arctg}x = \operatorname{Arg}(1 + xi).$$

Jeśli ponadto

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

to

$$|\operatorname{arctg}x| = |\operatorname{Arg}(1 + xi)| < \frac{\pi}{6},$$

co oznacza, że liczbę $1 + xi$ można podnieść do trzeciej potęgi nie wychodząc z półpłaszczyzny liczb zespolonych o dodatniej części rzeczywistej.

Mamy więc

$$\begin{aligned} 3\operatorname{arctg}x &= 3\operatorname{Arg}(1 + xi) = \operatorname{Arg}\left((1 + xi)^3\right) = \operatorname{Arg}\left(1 + 3xi - 3x^2 - x^3i\right) = \operatorname{arctg}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \\ &= -\operatorname{arctg}\frac{x^3 - 3x}{1 - 3x^2}, \end{aligned}$$

a to oznacza, że $f(x) = 0$.

Dla kompletności rozumowania należy zauważyć, że

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$



oraz

$$\frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu funkcja jest stała równa 0. Zatem liczba 0 jest zarówno najmniejszą jak i największą wartością funkcji, osiąganą na całym podanym przedziale.

Zadanie 235. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2012}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2012}}.$$

Rozwiązanie:

Ze wzoru

$$\binom{n}{2012} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-2011)}{2012!}$$

wynika

$$\frac{1}{\binom{n}{2012}} = \frac{2012!}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-2011)}.$$

Zauważmy też, że

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-2011)} - \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-2010)} = \\ &= \frac{n - (n-2011)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-2011)} = \frac{2011}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-2011)}. \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$b_n = \frac{2012 \cdot 2010!}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-2011)}.$$

Wtedy z wcześniejszych równości wynika

$$\frac{1}{\binom{n}{2012}} = b_n - b_{n+1}.$$

Stąd otrzymujemy wzór na sumę częściową szeregu danego w treści zadania

$$\begin{aligned} \sum_{n=2012}^N \frac{1}{\binom{n}{2012}} &= \sum_{n=2012}^N (b_n - b_{n+1}) = b_{2012} - b_{N+1} = \\ &= \frac{2012 \cdot 2010!}{2011!} - \frac{2012 \cdot 2010!}{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-2010)}, \end{aligned}$$

co przy $N \rightarrow \infty$ dąży do

$$\frac{2012 \cdot 2010!}{2011!} = \frac{2012}{2011}.$$

Odpowiedź: Suma szeregu jest równa $2012/2011$.