



Liga Zadaniowa, Edycja II, Seria 4 (waga 2), Rozwiązania

Zadanie 241. Interesują nas rozwiązania równania

$$m^{m^m} = 2^{2^n}$$

w liczbach naturalnych m, n większych od 2.

Rozstrzygnąć, czy:

- a) takie rozwiązania nie istnieją,
- b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
- c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

PRZYPOMNIENIE: Potęgowanie wykonujemy **od góry**: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że podane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających określone w zadaniu warunki.

W tym celu dla dowolnej liczby naturalnej k przyjmijmy

$$m = 2^{2^k}.$$

Wówczas lewa strona danego w zadaniu równania sprowadza się do postaci

$$(2^{2^k})^{(2^{2^k})^{2^{2^k}}} = 2^{2^k \cdot (2^{2^k})^{2^{2^k}}} = 2^{2^k \cdot 2^{2^k \cdot 2^{2^k}}} = 2^{2^{k+2^k \cdot 2^{2^k}}},$$

a zatem wystarczy przyjąć

$$n = k + 2^k \cdot 2^{2^k}.$$

Zadanie 242. Rozstrzygnąć, czy równanie

$$a^5 + b^7 = c^{10}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c .

Rozwiązanie:

Mnożąc obustronnie równość

$$1 + 31 = 2^5$$

przez $2^m \cdot 31^n$ otrzymujemy

$$2^m \cdot 31^n + 2^m \cdot 31^{n+1} = 2^{m+5} \cdot 31^n.$$

Dobierzemy m, n tak, aby można było przyjąć

$$a^5 = 2^m \cdot 31^n, \quad b^7 = 2^m \cdot 31^{n+1}, \quad c^{10} = 2^{m+5} \cdot 31^n.$$

W tym celu musimy zapewnić spełnienie następujących kongruencji

$$m \equiv 5 \pmod{10}$$

$$m \equiv 0 \pmod{7}$$

$$n \equiv 0 \pmod{10}$$

$$n \equiv 6 \pmod{7}.$$

Powyższe warunki są spełnione np. przez $m = 35, n = 20$, co prowadzi do rozwiązania

$$a = 2^7 \cdot 31^4, \quad b = 2^5 \cdot 31^3, \quad c = 2^4 \cdot 31^2.$$



Zadanie 243. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzamy szacowanie

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{y^4 + 1} \right| = \frac{|(x^4 + 1) - (y^4 + 1)|}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} \leq \\ &\leq \frac{|x - y| \cdot (|x| + |y|) \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot \left(\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} \right)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} = \\ &= |x - y| \cdot \frac{\left(\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} \right)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} \right)}{\left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} \leq |x - y| \cdot 1 \cdot 1 = |x - y|. \end{aligned}$$

Zadanie 244. Wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie s oraz t , a następnie udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, c zachodzą nierówności

$$(abc)^s \leq \text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c) \leq (abc)^t$$

oraz wykazać, że wskazane liczby s, t są optymalne, tzn. liczby s nie można zastąpić większą, a liczby t mniejszą.

Rozwiązanie:

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą, i niech i, j, k będą wykładnikami, z jakimi p występuje w rozkładach odpowiednio liczb a, b, c na czynniki pierwsze.

Wówczas p występuje w rozkładzie liczby $\text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c)$ z wykładnikiem $\min(i, j, k) + \max(i, j, k)$, a w rozkładzie iloczynu abc z wykładnikiem $i + j + k$.

Z nierówności

$$\min(i, j, k) + \max(i, j, k) \leq i + j + k$$

wobec dowolności liczby p wynika, że liczba $\text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c)$ jest dzielnikiem iloczynu abc , skąd w szczególności

$$\text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c) \leq abc = (abc)^1,$$

co dowodzi prawej nierówności z treści zadania z $t = 1$.

Przykład $a = b = 1, c = 2$, w którym

$$\text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c) = 2$$

oraz

$$abc = 2$$



pokazuje, że liczby $t = 1$ nie można zastąpić mniejszą.

Analogicznie z nierówności

$$2 \cdot (\min(i, j, k) + \max(i, j, k)) \geq \min(i, j, k) + 2 \cdot \max(i, j, k) \geq i + j + k$$

wobec dowolności liczby p wynika, że liczba $(\text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c))^2$ jest podzielna przez iloczyn abc , skąd wynika nierówność

$$abc \leq (\text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c))^2,$$

czyli

$$\sqrt{abc} \leq \text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c),$$

co dowodzi lewej nierówności z treści zadania z $s = 1/2$.

Przykład $a = 1$, $b = c = 2$, w którym

$$\text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c) = 2$$

oraz

$$abc = 4$$

pokazuje, że liczby $s = 1/2$ nie można zastąpić większą.

Udowodniliśmy więc, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, c zachodzą nierówności

$$\sqrt{abc} \leq \text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c) \leq abc,$$

przy czym oszacowań nie można poprawić zachowując ich postać podaną w treści zadania.

Zadanie 245. Podać przykład takiego ciągu liczb rzeczywistych (a_n) , że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$$

jest zbieżny dla $k = 13$ oraz dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2012$, a rozbieżny dla pozostałych liczb naturalnych k .

Rozwiązanie:

Wykażemy, że warunki zadania są spełnione przez ciąg (a_n) zdefiniowany wzorami

$$a_{3n-2} = a_{3n-1} = \frac{1}{n^{1/2011}}$$

$$a_{3n} = -\frac{2^{1/13}}{n^{1/2011}}.$$

Skorzystamy z następującego lematu:

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{3n-2} + b_{3n-1} + b_{3n}).$$

Dowód lematu:



Niech

$$S_n = \sum_{i=1}^n b_i$$

będzie n -tą sumą częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to ciąg (S_n) jest zbieżny, a w konsekwencji zbieżny jest jego podciąg (S_{3n}) będący ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{3n-2} + b_{3n-1} + b_{3n})$.

Jeśli zaś zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{3n-2} + b_{3n-1} + b_{3n})$, to zbieżny jest ciąg (S_{3n}) , a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{3n} + b_{3n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{3n} + b_{3n+1} + b_{3n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{3n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n},$$

skąd wynika zbieżność ciągu (S_n) , a więc także szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dowód lematu jest zakończony.

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, zamiast zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$$

wystarczy badać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}^k + a_{3n-1}^k + a_{3n}^k) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{k/2011}} + \frac{1}{n^{k/2011}} + \frac{(-1)^k \cdot 2^{k/13}}{n^{k/2011}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k \cdot 2^{k/13}}{n^{k/2011}}.$$

Niezależny od n czynnik $2 + (-1)^k \cdot 2^{k/13}$ nie wpływa na zbieżność szeregu poza przypadkiem $k = 13$, kiedy to $2 + (-1)^k \cdot 2^{k/13} = 0$ i szereg jest zbieżny jako szereg złożony z samych zer.

Natomiast szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k/2011}}$$

jest zbieżny, gdy $k/2011 > 1$, czyli $k \geq 2012$, a rozbieżny, gdy $k/2011 \leq 1$, czyli $k \leq 2011$.

Stąd wynika, że podany przykład spełnia warunki zadania.