



Liga Zadaniowa, Edycja II, Seria 5 (waga 2), Rozwiązania

Zadanie 251. Wyznaczyć wszystkie miary kąta $\alpha \in (0^\circ, 45^\circ)$, dla których prawdziwa jest równość

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{8}.$$

Rozwiązanie:

Mnożąc daną w zadaniu równość stronami przez liczbę dodatnią $8 \cdot \sin \alpha$ i korzystając trzykrotnie z tożsamości

$$\sin \beta \cos \beta = \frac{\sin 2\beta}{2}$$

otrzymujemy

$$\sin 8\alpha = \sin \alpha,$$

przy czym zauważamy, że $0 < \alpha < 8\alpha < 360^\circ$.

Z przebiegu funkcji sinus w przedziale $(0^\circ, 360^\circ)$ wynika, że równość $\sin \alpha = \sin \beta$ przy $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ oraz $\alpha < \beta < 360^\circ$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Interesuje nas przypadek $\beta = 8\alpha$, co prowadzi do równania $9\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = 20^\circ$.

Odpowiedź: Jedyną miarą kąta spełniającą podane równanie jest $\alpha = 20^\circ$.

Zadanie 252. Interesują nas liczby całkowite dodatnie n o następujących własnościach:

- (i) liczba n w zapisie dziesiętnym ma parzystą liczbę cyfr (przyjmujemy, że zapis dziesiętny liczby naturalnej nie może zaczynać się od cyfry 0), oznaczmy tę liczbę cyfr przez $2k$,
- (ii) jeżeli podzielimy liczbę n na dwie grupy k -cyfrowe, a następnie zamienimy te grupy miejscami, to powstanie liczba większa od n będąca wielokrotnością liczby n .

Rozstrzygnąć, czy:

- a) takie liczby nie istnieją,
- b) takie liczby istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
- c) takich liczb jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie:

Niech a i b będą liczbami utworzonymi przez k -cyfrowe grupy cyfr liczby n . Wówczas

$$n = a \cdot 10^k + b,$$

natomiast wykonanie opisanej w zadaniu operacji prowadzi do liczby $b \cdot 10^k + a$.

Zgodnie z założeniami zadania

$$b \cdot 10^k + a = d \cdot (a \cdot 10^k + b),$$

gdzie $2 \leq d \leq 9$.

Przekształcanie powyższej równości prowadzi kolejno do

$$\begin{aligned} b \cdot 10^k + a &= ad \cdot 10^k + bd \\ b \cdot (10^k - d) &= a \cdot (d \cdot 10^k - 1). \end{aligned}$$



Liczba b jako liczba k -cyfrowa jest mniejsza od 10^k , a ponadto iloczyn $b \cdot (10^k - d)$ jest podzielny przez $d \cdot 10^k - 1 > (d-1) \cdot 10^k$. Stąd wynika, że liczby $A = 10^k - d$ oraz $B = d \cdot 10^k - 1$ mają wspólny dzielnik większy od $d-1$.

Z uwagi na równość

$$B - d \cdot A = (d \cdot 10^k - 1) - d \cdot (10^k - d) = d^2 - 1$$

każdy wspólny dzielnik liczb A i B jest także dzielnikiem liczby $d^2 - 1$.

Rozpatrując kolejne wartości d wykluczamy, aby liczby A oraz B mogły mieć wspólny dzielnik większy od $d-1$, gdy $d \neq 6$ (jak się później okaże, sprawdzenie to nie jest konieczne do udzielenia odpowiedzi na postawione w zadaniu pytanie).

Dla $d=2$ liczba $B = 2 \cdot 10^k - 1$ daje przy dzieleniu przez $d^2 - 1 = 3$ resztę 1.

Dla $d=3$ liczba $B = 3 \cdot 10^k - 1$ jest nieparzysta, podczas gdy $d^2 - 1 = 8$.

Dla $d=4$ liczba $B = 4 \cdot 10^k - 1$ jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 5, natomiast $d^2 - 1 = 15$.

Dla $d=5$ liczba $B = 5 \cdot 10^k - 1$ jest nieparzysta i niepodzielna przez 3, podczas gdy $d^2 - 1 = 24$.

Dla $d=7$ liczba $B = 7 \cdot 10^k - 1$ jest nieparzysta i podzielna przez 3, podczas gdy $d^2 - 1 = 48$.

Dla $d=8$ liczba $B = 8 \cdot 10^k - 1$ jest niepodzielna przez 3, podczas gdy $d^2 - 1 = 63$.

Dla $d=9$ liczba $B = 9 \cdot 10^k - 1$ jest nieparzysta i niepodzielna przez 5, podczas gdy $d^2 - 1 = 80$.

Natomiast dla $d=6$ liczba $B = 6 \cdot 10^k - 1$ jest niepodzielna przez 5, podczas gdy $d^2 - 1 = 35$. Nie możemy jednak wykluczyć podzielności liczby B przez 7. Co więcej, liczba B jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k przy dzieleniu przez 6 daje resztę 3.

Mamy wówczas

$$B = 6 \cdot 10^k - 1 = 7 \cdot 857142857142857142 \dots 857142857$$

$$A = 10^k - 6 = 7 \cdot 142857142857142857 \dots 142857142,$$

skąd wynika, że można przyjąć

$$a = \frac{A}{7} = 142857142857142857 \dots 142857142$$

oraz

$$b = \frac{B}{7} = 857142857142857142 \dots 857142857.$$

Zatem warunki zadania spełniają liczby n składające się z 6-cyfrowej grupy 142857 powtórzonej nieparzystą liczbę razy.

Odpowiedź: Istnieje nieskończenie wiele liczb spełniających warunki zadania.

Zadanie 253. Rozwiązać równanie

$$4x^4y + 4xy^4 = 4x^2 + 4y^2 + x^8 + y^8$$

w liczbach rzeczywistych x, y .

Rozwiązanie:



Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$(a - b)^2 \geq 0,$$

czyli

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Przyjmując $a = 2x$ i $b = y^4$ otrzymujemy nierówność

$$4xy^4 \leq 4x^2 + y^8,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x = y^4$.

Analogicznie zachodzi nierówność

$$4x^4y \leq 4y^2 + x^8,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2y = x^4$.

Dodając powyższe nierówności otrzymujemy nierówność

$$4x^4y + 4xy^4 \leq 4x^2 + 4y^2 + x^8 + y^8$$

prawdziwą dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y , przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x = y^4$ oraz $2y = x^4$. Z drugiego równania otrzymujemy

$$y = \frac{x^4}{2},$$

co po wstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$\begin{aligned} 2x &= \left(\frac{x^4}{2}\right)^4 \\ 2x &= \frac{x^{16}}{2^4} \\ 2^5x &= x^{16}. \end{aligned}$$

Zauważamy, że z $x = 0$ wynika $y = 0$, a ponadto liczby $x = y = 0$ stanowią rozwiązanie równania danego w treści zadania.

Jeżeli $x \neq 0$, możemy wykonać obustronne dzielenie przez x otrzymując

$$2^5 = x^{15},$$

skąd

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

Wówczas

$$y = \frac{x^4}{2} = \sqrt[3]{2}$$

i łatwo sprawdzamy, że liczby $x = y = \sqrt[3]{2}$ również stanowią rozwiązanie równania danego w treści zadania.

Odpowiedź: Równanie ma dwa rozwiązania: $x = y = 0$ oraz $x = y = \sqrt[3]{2}$.

Zadanie 254. Interesują nas takie pary liczb naturalnych (m, n) , że $3 < m < n$, a ponadto liczba przekątnych n -kąta wypukłego jest czterokrotnie większa od liczby przekątnych m -kąta wypukłego.



Rozstrzygnąć, czy:

- a) takie pary (m, n) nie istnieją,
- b) takie pary (m, n) istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
- c) takich par (m, n) jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie:

Liczba przekątnych k -kąta wypukłego jest równa $k(k-3)/2$, skąd wynika, że interesują nas rozwiązania równania

$$4m(m-3) = n(n-3).$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy kolejno

$$4m^2 - 12m = n^2 - 3n$$

$$16m^2 - 48m = 4n^2 - 12n$$

$$16m^2 - 48m + 36 = 4n^2 - 12n + 9 + 27$$

$$(4m-6)^2 = (2n-3)^2 + 27.$$

Oznaczając $a = 4m-6$ oraz $b = 2n-3$ otrzymujemy równanie

$$a^2 = b^2 + 27,$$

czyli

$$(a-b) \cdot (a+b) = 27.$$

Przy tym czynniki $a-b$ oraz $a+b$ są całkowite, dodatnie i tej samej przystości, a ponadto $a-b < a+b$.

Liczba 27 posiada dwa tego typu rozkłady na iloczyn:

$$27 = 3 \cdot 9 = 1 \cdot 27.$$

Pierwszy rozkład prowadzi do $a=6$, $b=3$, skąd $m=n=3$, co nie spełnia ograniczeń podanych w treści zadania.

Drugi rozkład prowadzi do $a=14$, $b=13$, skąd $m=5$ oraz $n=8$.

Odpowiedź: Istnieje jedna para liczb spełniających warunki zadania, a mianowicie $m=5$, $n=8$.

Zadanie 255. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ jest różniczkowalna na całej prostej rzeczywistej i ma ciągłą pochodną, a ponadto $f(x)=0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \leq 0$. Wiadomo również, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f'(x) = \sqrt{f(x)}.$$

Czy stąd wynika, że $f(x)=0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x ?

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie wynika.

Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą nieujemną i niech funkcja f będzie zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq a \\ \frac{(x-a)^2}{4}, & \text{gdy } x > a \end{cases}.$$



Wówczas funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie różnym od a i jej pochodna dana jest wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < a \\ \frac{x-a}{2}, & \text{gdy } x > a \end{cases},$$

spełnia więc warunek $f'(x) = \sqrt{f(x)}$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \neq a$.

W punkcie a funkcja f ma pochodne jednostronne równe 0, jest więc różniczkowalna w punkcie a i przy tym

$$f'(a) = 0 = \sqrt{f(a)}.$$

Tak więc funkcja f spełnia założenia zadania, a nie jest funkcją stałą równą zero.