



## Liga Zadaniowa, Edycja II, Seria 6 (waga 3), Rozwiązania

**Zadanie 261.** Dane są takie liczby naturalne  $a, b, c, d, e, f$ , że każda z sześciu sum  $a+b, b+c, c+d, d+e, e+f, f+a$  jest podzielna przez 1001. Czy stąd wynika, że każda z liczb  $a, b, c, d, e, f$  jest podzielna przez 1001?

*Rozwiązanie:*

Nie wynika, co pokazuje przykład  $a = c = e = 1, b = d = f = 1000$ , w którym założenia zadania są spełnione, a liczby  $a, b, c, d, e, f$  nie są podzielne przez 1001.

**Zadanie 262.** Rozwiązać nierówność

$$2013^{x^2+1} - 2013^{x+7} < (x+7)^{2013} - (x^2+1)^{2013}$$

w liczbach rzeczywistych  $x$ .

*Rozwiązanie:*

Dziedziną nierówności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Przekształcamy nierówność do postaci

$$2013^{x^2+1} + (x^2+1)^{2013} < 2013^{x+7} + (x+7)^{2013}$$

i zauważmy, że można ją zapisać jako

$$f(x^2+1) < f(x+7),$$

gdzie funkcja  $f$  jest określona wzorem

$$f(x) = 2013^x + x^{2013}.$$

Ponieważ zarówno  $2013^x$  jak i  $x^{2013}$  rośnie wraz ze wzrostem  $x$ , funkcja  $f$  jest rosnąca.

Zatem nierówność  $f(x^2+1) < f(x+7)$  jest równoważna nierówności

$$x^2+1 < x+7,$$

co rozwiązujemy wykonując następujące przekształcenia:

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$(x+2)(x-3) < 0.$$

**Odpowiedź:** Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział  $(-2, 3)$ .

**Zadanie 263.** Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb całkowitych dodatnich  $(m, n)$ , że liczba  $m$  jest większa o  $m\%$  od liczby  $n$ .

*Rozwiązanie:*

**Sposób I:**

Chcemy rozwiązać w liczbach naturalnych  $m, n$  równanie

$$m = n + \frac{mn}{100},$$

co sprowadza się kolejno do

$$m = n \cdot \left(1 + \frac{m}{100}\right)$$

$$m = n \cdot \frac{100+m}{100}$$



$$n = m \cdot \frac{100}{100 + m}$$

$$n = \frac{100m}{100 + m}.$$

Zatem liczba  $n$  jest jednoznacznie wyznaczona przez liczbę  $m$  i zadanie sprowadza się do wyznaczenia liczb naturalnych  $m$ , dla których liczba  $100m$  jest podzielna przez  $100+m$ . Niech  $d$  będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb 100 oraz  $m$ . Oznaczmy  $a = 100/d$  oraz  $b = m/d$ . Wówczas liczby  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze, a interesująca nas podzielność sprowadza się do podzielności liczby  $abd^2$  przez  $(a+b)d$ , czyli do podzielności  $abd$  przez  $a+b$ . Ponieważ liczby  $a$ ,  $b$  są z założenia względnie pierwsze, każda z nich jest względnie pierwsza z ich sumą  $a+b$ , skąd wynika, że liczba  $abd$  jest podzielna przez  $a+b$  wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $d$  jest podzielna przez  $a+b$ .

Tak więc liczba  $d$  musi być dzielnikiem liczby 100, natomiast liczba  $a+b$  musi być **dzielnikiem** liczby  $d$  **względnie pierwszym** z  $a$  i większym od  $a$ .

W szczególności wynika stąd, że  $d > a$ , co wobec równości  $a = 100/d$  prowadzi do  $d > 10$ , czyli  $d$  może przyjmować jedną z czterech z wartości: 20, 25, 50, 100.

Dla  $d = 20$  otrzymujemy  $a = 5$ , jednak dzielniki liczby 20 większe od 5 to 10 i 20 - obydwa są podzielne przez 5.

Dla  $d = 25$  otrzymujemy  $a = 4$ . Nieparzyste dzielniki liczby 25 większe od 4 to 5 i 25 - prowadzą odpowiednio do  $b = 1$  i  $b = 21$  oraz  $m = 25$  i  $m = 525$ .

Dla  $d = 50$  otrzymujemy  $a = 2$ . Nieparzyste dzielniki liczby 50 większe od 2 to 5 i 25 - prowadzą odpowiednio do  $b = 3$  i  $b = 23$  oraz  $m = 150$  i  $m = 1150$ .

Dla  $d = 100$  otrzymujemy  $a = 1$ . Dzielniki liczby 100 większe od 1 to 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 - prowadzą odpowiednio do  $b = 1$ ,  $b = 3$ ,  $b = 4$ ,  $b = 9$ ,  $b = 19$ ,  $b = 24$ ,  $b = 49$  i  $b = 99$  oraz  $m = 100$ ,  $m = 300$ ,  $m = 400$ ,  $m = 900$ ,  $m = 1900$ ,  $m = 2400$ ,  $m = 4900$  i  $m = 9900$ .

### Sposób II:

Podobnie jak w sposobie pierwszym dochodzimy do

$$n = \frac{100m}{100 + m}.$$

Postaramy się wyrazić  $m$  w zależności od  $n$ . W tym celu przekształcamy kolejno

$$n = \frac{100m + 10000 - 10000}{100 + m}$$

$$n = 100 - \frac{10000}{100 + m}$$

$$\frac{10000}{100 + m} = 100 - n$$

$$\frac{100 + m}{10000} = \frac{1}{100 - n}$$

$$100 + m = \frac{10000}{100 - n}$$

$$m = \frac{10000}{100 - n} - 100,$$



skąd wynika, że liczba  $100 - n$  musi być liczbą dodatnią mniejszą od 100, a ponadto musi być dzielnikiem liczby 10000. Takich dzielników jest dwanaście: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, co oczywiście prowadzi do tych samych rozwiązań, co w sposobie pierwszym.

**Odpowiedź:** Istnieje dwanaście par liczb  $(m, n)$  spełniających warunki zadania: (25, 20), (100, 50), (150, 60), (300, 75), (400, 80), (525, 84), (900, 90), (1150, 92), (1900, 95), (2400, 96), (4900, 98) i (9900, 99).

**Zadanie 264.** Rozstrzygnąć prawdziwość następującego zdania:

Spośród dowolnych 34 różnych liczb naturalnych można wybrać takie trzy różne liczby  $a, b, c$ , że liczba

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

jest podzielna przez 17.

*Rozwiązanie:*

Wykażemy, że podane zdanie jest fałszywe.

W tym celu wskażemy 34 liczby naturalne, spośród których nie można wybrać trzech liczb  $a, b, c$  spełniających warunki zadania.

Rozważmy początkowe 34 liczby naturalne, tzn. liczby 1, 2, 3, ..., 34. Zauważmy, że przy dzieleniu przez 17 liczby te dają każdą z możliwych reszt dokładnie dwukrotnie. Zatem przy dowolnym wyborze liczb  $a, b, c$ , liczby te nie dają tej samej reszty przy dzieleniu przez 17.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = A^2 + B^2 + (A + B)^2 = 2 \cdot (A^2 + AB + B^2), \end{aligned}$$

gdzie  $A = a - b$  oraz  $B = b - c$ , skąd

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = A^2 + AB + B^2.$$

Ponieważ liczby  $a, b, c$  nie dają tej samej reszty przy dzieleniu przez 17, co najmniej jedna z liczb  $A, B$  nie jest podzielna przez 17.

Wykażemy jednak, że liczba  $A^2 + AB + B^2$  jest podzielna przez 17 tylko wtedy, gdy obie liczby  $A, B$  są podzielne przez 17.

Jeżeli liczba  $A^2 + AB + B^2$  jest podzielna przez 17, to przez 17 podzielna jest także liczba

$$4 \cdot (A^2 + AB + B^2) = 4A^2 + 4AB + B^2 + 3B^2 = (2A + B)^2 + 3B^2 = C^2 + 3B^2,$$

gdzie  $C = 2A + B$ .

Wówczas

$$C^2 \equiv -3B^2 \pmod{17},$$

skąd po podniesieniu stronami do potęgi 8 otrzymujemy

$$C^{16} \equiv 3^8 \cdot B^{16} \pmod{17}.$$

Korzystając z

$$3^8 = 81^2 \equiv (-4)^2 = 16 \equiv -1 \pmod{17}$$



otrzymujemy

$$C^{16} \equiv -B^{16} \pmod{17}.$$

Ponieważ na mocy Małego Twierdzenia Fermata 16-ta potęga liczby naturalnej przy dzieleniu przez 17 może tylko dawać resztę 0 lub 1,

$$C^{16} \equiv B^{16} \equiv 0 \pmod{17},$$

skąd wynika, że liczby  $B$  i  $C$ , a w konsekwencji także liczba  $A$  są podzielne przez 17.

**Odpowiedź:** Podane zdanie jest fałszywe.

**Zadanie 265.** Rozstrzygnąć prawdziwość następującego zdania:

Spośród dowolnych 35 różnych liczb naturalnych można wybrać takie trzy różne liczby  $a, b, c$ , że liczba

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

jest podzielna przez 17.

*Rozwiązanie:*

Wykażemy, że podane zdanie jest prawdziwe.

W tym celu wybierzmy liczby  $a, b, c$  tak, aby przy dzieleniu przez 17 dawały taką samą resztę. Taki wybór jest możliwy, gdyż reszt z dzielenia jest 17, a dostępnych liczb  $35 > 2 \cdot 17$ .

Wówczas każda z 6 liczb  $a^2, b^2, c^2, ab, bc, ca$  daje przy dzieleniu przez 17 taką samą resztę, a stąd wynika, że liczba  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$  jest podzielna przez 17.

**Odpowiedź:** Podane zdanie jest prawdziwe.