



Liga Zadaniowa, Edycja III, Seria 1, Rozwiązania

Zadanie 311. Liczba naturalna a jest liczbą sześciocyfrową niepodzielną przez 10. Liczba b powstaje z liczby a przez przestawienie cyfry jedności na początek.

Dowieść, że liczba $a + 3b$ jest podzielna przez 13.

Rozwiązanie:

Niech d będzie cyfrą jedności liczby a oraz niech c będzie liczbą pięciocyfrową powstałą z liczby a przez usunięcie cyfry jedności.

Wówczas

$$a = 10c + d \quad \text{oraz} \quad b = 100000d + c,$$

skąd

$$\begin{aligned} a + 3b &= 13c + 300001d = 13c + (299000 + 1001)d = 13c + (13 \cdot 23000 + 13 \cdot 77)d = \\ &= 13(c + 23077d), \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 312. Udowodnić następującą cechę podzielności przez 3:

Liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma sześciątów jej cyfr jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika z powszechnie znanej cechy podzielności przez 3 oraz z faktu, że dla dowolnej cyfry $0 \leq c \leq 9$ liczba $c^3 - c = (c - 1)c(c + 1)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych.

Zadanie 313. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n - 1)^3 = \binom{2n^2}{2}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ lewa strona danej w zadaniu równości składa się z jednego składnika i ma wartość 1. Prawa strona także jest równa $\binom{2}{2} = 1$.

Zatem dla $n = 1$ dowodzona równość jest prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n - 1)^3 = \binom{2n^2}{2}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n - 1)^3 + (2n + 1)^3 = \binom{2(n + 1)^2}{2}.$$

Przekształcając lewą stronę powyższej równości i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n - 1)^3 + (2n + 1)^3 = \binom{2n^2}{2} + (2n + 1)^3 =$$



$$= \frac{2n^2(2n^2-1)}{2} + (2n+1)^3 = n^2(2n^2-1) + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 =$$

$$= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1.$$

Z kolei prawa strona dowodzonej równości jest równa

$$\binom{2(n+1)^2}{2} = \frac{(2n^2+4n+2)(2n^2+4n+1)}{2} = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) =$$

$$= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1.$$

Równość została udowodniona, ponieważ doprowadziliśmy jej obie strony do tej samej postaci.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej równość dana w zadaniu została udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n .

Zadanie 314. W ciągu (a_n) pierwszy wyraz jest liczbą naturalną nie większą od 10^{10} , a każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie podwojonej sumy cyfr.

Dowieść, że w ciągu (a_n) nie występuje liczba 10^{100} .

Rozwiązanie:

Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby k .

Ponieważ suma cyfr przy dzieleniu przez 9 daje identyczną resztę jak sama liczba, liczba $a_2 = a_1 + 2S(a_1)$ daje przy dzieleniu przez 9 taką samą resztę jak $3a_1$. Analogicznie, liczba a_3 daje przy dzieleniu przez 9 taką samą resztę jak $9a_1$, czyli jest podzielna przez 9. Widzimy więc, że począwszy od trzeciego wyrazu, ciąg zawiera tylko liczby podzielne przez 9, nie może więc w nim wystąpić liczba 10^{100} , która przy dzieleniu przez 9 daje resztę 1.

Zadanie 315. Liczby pierwsze p, q, r spełniają nierówności

$$p^3 < q^7, \quad p^2 < r^3.$$

Dowieść, że $p < qr$.

Rozwiązanie:

Podnosząc dane w zadaniu nierówności odpowiednio do potęg $3/7$ i $2/3$ otrzymujemy

$$p^{3/7} < q$$

oraz

$$p^{2/3} < r,$$

skąd

$$qr > p^{3/7+2/3} = p^{23/21} > p.$$

Uwaga: Założenia zadania spełnia np. trójka liczb $(p, q, r) = (5, 2, 3)$.