



Liga Zadaniowa, Edycja III, Seria 3, Rozwiązania

Zadanie 331. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych s niepodzielnych przez 3, o następującej własności:

Żadna liczba naturalna o sumie cyfr równej s nie jest kwadratem ani sześcianiem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Z równości

$$(3k)^2 = 3 \cdot 3k^2 + 0$$

oraz

$$(3k \pm 1)^2 = 3 \cdot (3k^2 \pm 2k) + 1$$

wynika, że kwadrat liczby naturalnej nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 2. Stąd wynika w szczególności, że przy dzieleniu przez 9 nie daje żadnej z reszt 2, 5, 8.

Z kolei równości

$$(3k)^3 = 9 \cdot 3k^3 + 0$$

oraz

$$(3k \pm 1)^3 = 9 \cdot (3k^3 \pm 3k^2 + k) \pm 1$$

dowodzą, że sześciątka liczby naturalnej nie daje przy dzieleniu przez 9 żadnej z reszt 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Jeżeli więc liczba s daje przy dzieleniu przez 9 resztę 2 lub 5, to na mocy cechy podzielności przez 9 liczba naturalna o sumie cyfr równej s daje przy dzieleniu przez 9 taką samą resztę jak s , a zatem nie jest kwadratem ani sześcianiem liczby całkowitej.

Wykazaliśmy więc, że warunki zadania są spełnione przez nieskończenie wiele liczb s .

Zadanie 332. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna $r > 1$ spełniająca równość $r^r = 16$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost.

Zauważmy najpierw, że r nie może być liczbą całkowitą, gdyż $2^2 < 16 < 3^3$.

Załóżmy, że liczba wymierna r spełniająca warunki zadania istnieje i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego $r = m/n$.

Ponieważ liczba r nie jest całkowita, mamy $n > 1$.

Wychodząc od równości $r^r = 16$ otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/n} &= 16 \\ \left(\frac{m}{n}\right)^m &= 16^n \\ m^m &= 2^{4n} \cdot n^m. \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

Liczba n jest większa od 1, posiada zatem dzielnik pierwszy p . Ponieważ liczby m, n są względnie pierwsze, liczba m nie jest podzielna przez p .

Wobec twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż prawa strona równości $(\clubsuit)$ jest podzielna przez p , a lewa nie.

Zatem liczba wymierna r o żądanych własnościach nie istnieje.



Zadanie 333. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+4}{n^3+4} + \frac{n^2+9}{n^3+9} + \frac{n^2+16}{n^3+16} + \frac{n^2+25}{n^3+25} + \dots + \frac{n^2+k^2}{n^3+k^2} + \dots + \frac{n^2+n^2}{n^3+n^2} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona n składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{n^2+k^2}{n^3+1^2} = \frac{\sum_{k=1}^n (n^2+k^2)}{n^3+1} = \frac{\sum_{k=1}^n n^2 + \sum_{k=1}^n k^2}{n^3+1} = \frac{n^3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1} = c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{n^2+k^2}{n^3+n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n (n^2+k^2)}{n^3+n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n n^2 + \sum_{k=1}^n k^2}{n^3+n^2} = \frac{n^3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n^2} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{4}{3}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{3},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{4}{3}.$$

Zadanie 334. Siedmioosobowa komisja powinna mieć dostęp do szafy pancерnej z tajnymi dokumentami na następujących zasadach:

- żadnych trzech członków nie może otworzyć szafy pancерnej,
- dowolnych czterech członków może otworzyć szafę pancerną.

Ile co najmniej zamków należy zamontować i jak rozdać klucze?

Rozwiązanie:

Poczyńmy następujące obserwacje:

- 1° Klucz do każdego zamka powinien być rozdany co najmniej czterem członkom komisji. Gdyby bowiem pewien klucz został rozdany co najwyżej trzem osobom, to istniałaby czwórka osób nie mających tego klucza, a więc nie mogących otworzyć szafy pancерnej.
- 2° Dla każdej trójki członków komisji istnieje klucz, którego żaden z tych członków nie posiada — w przeciwnym razie nie mieliby oni przeszkody w otwarciu kasy. Zgodnie z 1°, klucz ten musi być w posiadaniu każdego z pozostałych czterech członków komisji.
- 3° Nie ma potrzeby, aby dwa klucze były rozdane temu samemu zbiorowi członków komisji lub dwóm zbiorom, z których jeden zawiera drugi.



Z powyższych obserwacji wynika, że dla każdego 4-osobowego zbioru członków komisji, należy zamontować odpowiadający temu zbiorowi zamek, a klucz do niego dać każdemu z tych członków. To wymaga zamontowania $\binom{7}{4} = 35$ zamków.

Zadanie 335. Interesują nas rozwiązania równania

$$7x^2 + y^{14} + z^{14} = t^{14}$$

w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z, t spełniających warunek $\text{NWD}(x, y, z, t) = 1$.

Rozstrzygnąć, czy:

- a) takie rozwiązania nie istnieją,
- b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
- c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z następujących dwóch spostrzeżeń:

1° Zachodzi następujący ciąg tożsamości:

$$\begin{aligned} (p+q)^7 - p^7 - q^7 &= 7p^6q + 21p^5q^2 + 35p^4q^3 + 35p^3q^4 + 21p^2q^5 + 7pq^6 = \\ &= 7pq(p^5 + 3p^4q + 5p^3q^2 + 5p^2q^3 + 3pq^4 + q^5) = 7pq(p+q)(p^4 + 2p^3q + 3p^2q^2 + 2pq^3 + q^4) = \\ &= 7pq(p+q)(p^2 + pq + q^2)^2. \end{aligned}$$

2° Ze znanego wzoru na trójki pitagorejskie wynika, że liczby a, b, c określone wzorami

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

spełniają równanie $a^2 + b^2 = c^2$, a przy tym są one względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, jeżeli liczby naturalne $m > n$ są względnie pierwsze i mają różną parzystość.

Łączymy oba spostrzeżenia przyjmując $p = a^2, q = b^2, p + q = c^2$.

To prowadzi do następującego rozwiązania danego w zadaniu równania:

$$\begin{aligned} y &= a = m^2 - n^2 \\ z &= b = 2mn \\ t &= c = m^2 + n^2 \\ x &= abc(p^2 + pq + q^2). \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że dane w zadaniu równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, dowodząc następującej własności trójek pitagorejskich (a, b, c) : liczba $c^{14} - a^{14} - b^{14}$ jest siedmiokrotnym kwadratem.

Uwaga: W poniższej tabeli podano rozwiązania otrzymane dla $m, n \leq 5$.

m	n	$y = a$	$z = b$	$t = c$	x
2	1	3	4	5	28860
3	2	5	12	13	19469580
4	1	15	8	17	141006840
4	3	7	24	25	1522084200
5	2	21	20	29	6466130580
5	4	9	40	41	39795336360