



Liga Zadaniowa, Edycja III, Seria 4 (waga 2), Rozwiązania

Zadanie 341. Dane są takie liczby całkowite dodatnie m, n , że liczba m^m jest podzielna przez n^n . Czy stąd wynika, że liczba m jest podzielna przez n ?

Rozwiązanie:

Nie wynika, co pokazuje przykład $m = 10, n = 4$. Wówczas liczba $m^m = 10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$ jest podzielna przez $n^n = 4^4 = 2^8$, ale $m = 10$ nie jest podzielne przez $n = 4$.

Inny przykład to $m = 12, n = 8$, gdzie liczba $m^m = 12^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}$ jest podzielna przez $n^n = 8^8 = 2^{24}$.

Zadanie 342. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$x^x \cdot y^y \geq (xy)^{(x+y)/2}.$$

Rozwiązanie:

Z uwagi na symetrię, możemy bez szkody dla ogólności rozwiązania założyć, że $x \geq y$.

Podnosząc daną w zadaniu nierówność stronami do kwadratu i wykonując dalsze przekształcenia otrzymujemy nierówności równoważne:

$$\begin{aligned} x^{2x} \cdot y^{2y} &\geq (xy)^{x+y} \\ x^{2x} \cdot y^{2y} &\geq x^{x+y} \cdot y^{x+y} \\ x^{x-y} &\geq y^{x-y}, \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $x \geq y$ oraz $x - y \geq 0$.

Zadanie 343. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_{(1+\sqrt{2})}(11+8\sqrt{2})$ jest wymierna czy niewymierna.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że podana liczba jest niewymierna. W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost.

Założmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i wobec tego, że jest to liczba dodatnia, zapiszmy ją w postaci m/n , gdzie m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Z definicji logarytmu mamy wówczas

$$(1+\sqrt{2})^{m/n} = 11+8\sqrt{2},$$

co po obu stronach podniesieniu do potęgi n prowadzi do

$$(1+\sqrt{2})^m = (11+8\sqrt{2})^n.$$

Ponieważ konsekwentna zmiana znaku przy $\sqrt{2}$ nie wpływa na przeprowadzane rachunki, mamy także

$$(1-\sqrt{2})^m = (11-8\sqrt{2})^n.$$

Po wymnożeniu stronami ostatnich dwóch równości otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})^m \cdot (1-\sqrt{2})^m &= (11+8\sqrt{2})^n \cdot (11-8\sqrt{2})^n \\ ((1+\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2}))^m &= ((11+8\sqrt{2}) \cdot (11-8\sqrt{2}))^n \\ (-1)^m &= (-7)^n. \end{aligned}$$



Jednak ta równość nie może mieć miejsca, gdyż jej lewa strona ma wartość bezwzględnie równą 1, a prawa co najmniej 7.

Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost i dowodzi, że podana w zadaniu liczba jest nieywnierna.

Zadanie 344. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{4n+1}}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ lewa strona danej w zadaniu nierówności jest równa $\binom{2}{1} = 2$, a prawa $\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$. Zatem dana nierówność staje się równością, czyli jest prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{4n+1}}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\binom{2n+2}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{4n+5}}.$$

Przekształcając lewą stronę powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n)!}{((n+1) \cdot n!)^2} = \binom{2n}{n} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2} = \\ &= \binom{2n}{n} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq \frac{2^{2n-1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{4n+1}} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} = \frac{2^{2n+1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{4n+5}} \cdot \frac{(2n+1) \cdot \sqrt{4n+5}}{2 \cdot (n+1) \cdot \sqrt{4n+1}}, \end{aligned}$$

co zakończy dowód indukcyjny, jeżeli wykażemy, że

$$\frac{(2n+1) \cdot \sqrt{4n+5}}{2 \cdot (n+1) \cdot \sqrt{4n+1}} \geq 1.$$

Przekształcanie powyższej nierówności prowadzi do ciągu nierówności równoważnych:

$$\begin{aligned} (2n+1) \cdot \sqrt{4n+5} &\geq 2 \cdot (n+1) \cdot \sqrt{4n+1} \\ (2n+1)^2 \cdot (4n+5) &\geq 4 \cdot (n+1)^2 \cdot (4n+1) \\ (4n+5) \cdot (4n^2+4n+1) &\geq (4n+1) \cdot (4n^2+8n+4) \\ 16n^3+16n^2+4n+20n^2+20n+5 &\geq 16n^3+32n^2+16n+4n^2+8n+4 \\ 16n^3+36n^2+24n+5 &\geq 16n^3+36n^2+24n+4 \\ 5 &\geq 4, \end{aligned}$$

a zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa.



Zadanie 345. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} < \frac{2^{2n-1} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{4n+1}}.$$

Rozwiązanie:

Najpierw przeprowadzimy dowód indukcyjny nierówności

$$\binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n-1} \cdot 3}{\sqrt{7n+2}}. \quad (\spadesuit)$$

1° Dla $n = 1$ lewa strona nierówności $(\spadesuit)$ jest równa $\binom{2}{1} = 2$, a prawa $\frac{2 \cdot 3}{\sqrt{9}} = 2$. Zatem nierówność $(\spadesuit)$ staje się równością, czyli jest prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n-1} \cdot 3}{\sqrt{7n+2}}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\binom{2n+2}{n+1} \leq \frac{2^{2n+1} \cdot 3}{\sqrt{7n+9}}. \quad (\heartsuit)$$

Przekształcając lewą stronę nierówności $(\heartsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n)!}{((n+1) \cdot n!)^2} = \binom{2n}{n} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2} = \\ &= \binom{2n}{n} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \leq \frac{2^{2n-1} \cdot 3}{\sqrt{7n+2}} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} = \frac{2^{2n+1} \cdot 3}{\sqrt{7n+9}} \cdot \frac{(2n+1) \cdot \sqrt{7n+9}}{2 \cdot (n+1) \cdot \sqrt{7n+2}}, \end{aligned}$$

co zakończy dowód indukcyjny nierówności $(\spadesuit)$, jeżeli wykażemy, że

$$\frac{(2n+1) \cdot \sqrt{7n+9}}{2 \cdot (n+1) \cdot \sqrt{7n+2}} \leq 1.$$

Przekształcanie powyższej nierówności prowadzi do ciągu nierówności równoważnych:

$$(2n+1) \cdot \sqrt{7n+9} \leq 2 \cdot (n+1) \cdot \sqrt{7n+2}$$

$$(2n+1)^2 \cdot (7n+9) \leq 4 \cdot (n+1)^2 \cdot (7n+2)$$

$$(7n+9) \cdot (4n^2+4n+1) \leq (7n+2) \cdot (4n^2+8n+4)$$

$$28n^3 + 28n^2 + 7n + 36n^2 + 36n + 9 \leq 28n^3 + 56n^2 + 28n + 8n^2 + 16n + 8$$

$$28n^3 + 64n^2 + 43n + 9 \leq 28n^3 + 64n^2 + 44n + 8$$

$$1 \leq n,$$

co jest prawdą dla każdej liczby naturalnej n .



Teraz wykonując szacowanie prawej strony nierówności (♠) udowodnimy nierówność daną w treści zadania.

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &\leq \frac{2^{2n-1} \cdot 3}{\sqrt{7n+2}} = \frac{2^{2n-1} \cdot 3}{\sqrt{7/4} \cdot \sqrt{4n+8/7}} < \frac{2^{2n-1} \cdot 3}{\sqrt{7/4} \cdot \sqrt{4n+1}} = \frac{2^{2n-1} \cdot 3 \cdot \sqrt{4/7}}{\sqrt{4n+1}} = \\ &= \frac{2^{2n-1} \cdot \sqrt{36/7}}{\sqrt{4n+1}} < \frac{2^{2n-1} \cdot \sqrt{36/6}}{\sqrt{4n+1}} = \frac{2^{2n-1} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{4n+1}}. \end{aligned}$$