



Liga Zadaniowa, Edycja III, Seria 6 (waga 3), Rozwiązania

Zadanie 361. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k > 1$, dla których równanie

$$(m^m)^k = n^n$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych m, n większych od 1.

Rozwiązanie:

Zapiszmy dane równanie jako

$$m^{mk} = n^n.$$

Jeżeli dwie potęgi są równe, to podstawy tych potęg są potęgami tej samej liczby. Możemy więc przyjąć $m = a^x$ oraz $n = a^y$. Ponieważ $m < n$, mamy także $x < y$, a przy tym $a > 1$. Rozważane równanie przyjmuje postać

$$a^{xka^x} = a^{ya^y},$$

co po zlogarytmowaniu przy podstawie a prowadzi do

$$xka^x = ya^y,$$

czyli

$$kx = ya^{y-x}.$$

Dla $k = 2$ powyższe równanie przyjmuje postać

$$2x = ya^{y-x},$$

jednak z uwagi na nierówności $x < y$ oraz $2 \leq a^{y-x}$ mamy

$$2x < ya^{y-x},$$

co pokazuje, że dla $k = 2$ dane w zadaniu równanie nie ma rozwiązań.

Natomiast w przypadku, gdy $k > 2$, otrzymujemy rozwiązanie przyjmując $x = a = k - 1$ oraz $y = k$.

Zadanie 362. Funkcje $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są określone następującymi wzorami:

$$f_1(x) = -\frac{25x}{24} + \frac{\sqrt{49x^2 + 37}}{24}, \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$f_{2012}(x) < x + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Rozwiązanie:

Wykres funkcji f_1 jest krzywą o równaniu

$$y = -\frac{25x}{24} + \frac{\sqrt{49x^2 + 37}}{24},$$

czyli

$$24y + 25x = \sqrt{49x^2 + 37}.$$

Z powyższego równania wynika

$$24y + 24x = \sqrt{49x^2 + 37} - x \geq \sqrt{49x^2 + 37} - |x| = \sqrt{49x^2 + 37} - \sqrt{x^2} > 0,$$

a z podobnego równania

$$24y + 25x = -\sqrt{49x^2 + 37}$$



dochodzimy do

$$24y + 24x = -\sqrt{49x^2 + 37} - x \leq -\sqrt{49x^2 + 37} + |x| = -\sqrt{49x^2 + 37} + \sqrt{x^2} < 0.$$

Zatem równanie wykresu funkcji f_1 można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x + y > 0$. Otrzymujemy kolejno

$$576y^2 + 1200xy + 625x^2 = 49x^2 + 37, \quad x + y > 0$$

$$576y^2 + 1200xy + 576x^2 = 37, \quad x + y > 0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f_1 jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = y$, co oznacza, że funkcja f_1 jest funkcją odwrotną do samej siebie. Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f_2(x) = x$, a w konsekwencji także $f_{2n}(x) = x$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n . W szczególności $f_{2012}(x) = x$, skąd od razu wynika teza zadania.

Zadanie 363. Ciągi rosnące $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty$, $(c_n)_{n=1}^\infty$, $(d_n)_{n=1}^\infty$ o wyrazach całkowitych dodatnich spełniają następujące warunki:

- (i) każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (a_n) , (b_n) ,
- (ii) każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (c_n) , (d_n) ,
- (iii) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $b_n = a_n + n$,
- (iv) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $d_n = c_n + 4n$.

Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność $2b_n \leq d_n$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że podane warunki jednoznacznie wyznaczają cztery ciągi występujące w zadaniu.

W dalszej części rozwiązania skorzystamy z następującego lematu:

Lemat: Niech α , β będą dodatnimi liczbami niewymiernymi spełniającymi warunek

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Wówczas ciągi $(e_n)_{n=1}^\infty$ oraz $(f_n)_{n=1}^\infty$ określone wzorami

$$e_n = [\alpha \cdot n], \quad f_n = [\beta \cdot n],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x , są rosnącymi ciągami o wyrazach całkowitych dodatnich, a każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z tych ciągów.

Dowód lematu:

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k wyznaczmy łączną liczbę wyrazów ciągów (e_n) , (f_n) mniejszych od k .

Warunek $e_n < k$ jest równoważny warunkowi $[\alpha \cdot n] < k$, a to jest równoważne nierówności $\alpha \cdot n < k$, czyli

$$n < \frac{k}{\alpha}$$

lub równoważnie

$$n \leq \left[\frac{k}{\alpha} \right].$$



Zatem w ciągu (e_n) występuje $\left[\frac{k}{\alpha}\right]$ wyrazów mniejszych od k i podobnie w ciągu (f_n) występuje $\left[\frac{k}{\beta}\right]$ wyrazów mniejszych od k .

Zatem dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k , w obu ciągach występuje

$$\left[\frac{k}{\alpha}\right] + \left[\frac{k}{\beta}\right] = k - 1$$

wyrazów mniejszych od k . Ponieważ występuje w nich k wyrazów mniejszych od $k+1$, dokładnie jeden wyraz jest równy k , co kończy dowód lematu.

Z lematu oraz własności czterech ciągów danych w treści zadania wynika, że ciągi te są określone wzorami

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot n \right] \\ b_n &= \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot n \right] \\ c_n &= \left[(-1+\sqrt{5}) \cdot n \right] \\ d_n &= \left[(3+\sqrt{5}) \cdot n \right], \end{aligned}$$

gdzie liczby $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $(-1+\sqrt{5})$ są dodatnimi rozwiązaniami równań odpowiednio

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1$$

oraz

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = 1.$$

Stąd wynika teza zadania, gdyż dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n mamy

$$b_n = \left[\frac{d_n}{2} \right].$$

Zadanie 364. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{21x_{i-1} + 20x_{i+2}} \geq \frac{n}{41},$$

gdzie numeracja x 'ów jest rozszerzona cyklicznie: $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że podana nierówność nie zawsze jest prawdziwa. W tym celu przedstawimy konstrukcję kontrprzykładu dla $n = 7$.

Przyjmijmy

$$x_3 = x_4 = x_5 = 1, \quad x_2 = x_6 = q, \quad x_1 = x_7 = q^2,$$

gdzie q jest małą liczbą dodatnią, która zostanie bliżej sprecyzowana w dalszej części rozwiązania.



Suma po lewej stronie danej nierówności ma wówczas wartość

$$S(q) = \frac{q^2}{21q^2 + 20} + \frac{q}{21q^2 + 20} + \frac{1}{21q + 20} + \frac{1}{21 + 20q} + \frac{1}{21 + 20q^2} + \frac{q}{21 + 20q^2} + \frac{q^2}{21q + 20q},$$

co przy q dążącym do 0 dąży do

$$0 + 0 + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + 0 + 0 = \frac{1}{20} + \frac{2}{21} = \frac{3}{60} + \frac{4}{42} < \frac{3}{41} + \frac{4}{41} = \frac{7}{41}.$$

Zatem dla odpowiednio małej liczby dodatniej q zachodzi nierówność

$$S(q) < \frac{7}{41},$$

skąd otrzymujemy zapowiedziany wcześniej kontrprzykład.

Uwagi:

Powyższy kontrprzykład, z pominięciem x_7 , działa już dla $n = 6$, gdyż również wtedy suma po prawej stronie nierówności dąży do

$$\frac{1}{20} + \frac{2}{21} < \frac{6}{41}$$

przy q dążącym do 0.

Analogiczna konstrukcja dla większych n , gdzie zaczynając od trzech centralnie położonych jedynek, w obie strony tworzymy postępy geometryczne o ilorazie q , pokazuje, że suma po lewej stronie nierówności może dowolnie zbliżać się do $\frac{1}{20} + \frac{2}{21}$, niezależnie od wielkości n . Oznacza to, że występująca po prawej stronie nierówności liczba $n/41$, dla dużych n nie jest nawet rzędem wielkości zbliżona do optymalnego oszacowania.

Zadanie 365. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{21x_{i+1} + 20x_{i+2}} \geq \frac{n}{41},$$

gdzie numeracja x 'ów jest rozszerzona cyklicznie: $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że podana nierówność nie zawsze jest prawdziwa. Poniżej przedstawimy konstrukcję kontrprzykładu.

W celu uproszczenia notacji założmy, że n jest podzielne przez 4 i niech $n = 4m$. Dla odpowiednio dobranych liczby rzeczywistych dodatnich $q > 1$ oraz $c < 1$, których wybór zostanie sprecyzowany później, przyjmijmy

$$\begin{aligned} x_{2i} &= q^{2i} & \text{dla } 1 \leq i \leq m \\ x_{2i-1} &= c \cdot q^{2i-1} & \text{dla } 1 \leq i \leq m \\ x_{2m+i} &= q^{2m-i} & \text{dla } 1 \leq i \leq 2m. \end{aligned}$$

Przykładowo, przy $n = 24$ tak określony ciąg $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{24})$ wygląda następująco:

$$(cq, q^2, cq^3, q^4, cq^5, q^6, cq^7, q^8, cq^9, q^{10}, cq^{11}, q^{12}, q^{11}, q^{10}, q^9, q^8, q^7, q^6, q^5, q^4, q^3, q^2, q, 1).$$



Składniki sumy występującej po lewej stronie nierówności danej w treści zadania są równe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{21cq+20q^2} & \text{ dla } 2 \leq i \leq 2m-2, \text{ } i \text{ parzyste, oraz dla } i=4m \\ \frac{c}{21q+20cq^2} & \text{ dla } 1 \leq i \leq 2m-3, \text{ } i \text{ nieparzyste} \\ \frac{c}{21q+20} & \text{ dla } i=2m-1 \\ \frac{q^2}{21q+20} & \text{ dla } 2m \leq i \leq 4m-2 \\ \frac{q}{21+20cq} & \text{ dla } i=4m-1, \end{aligned}$$

a zatem sama suma ma wartość

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{1}{21cq+20q^2} + (m-1) \cdot \frac{c}{21q+20cq^2} + \frac{c}{21q+20} + (2m-1) \cdot \frac{q^2}{21q+20} + \frac{q}{21+20cq} = \\ = m \cdot \frac{1}{21cq+20q^2} + m \cdot \frac{c}{21q+20cq^2} - \frac{c}{21q+20cq^2} + \frac{c}{21q+20} + \\ + 2m \cdot \frac{q^2}{21q+20} - \frac{q^2}{21q+20} + \frac{q}{21+20cq} = Am + B, \end{aligned}$$

gdzie

$$A = \frac{1}{21cq+20q^2} + \frac{c}{21q+20cq^2} + \frac{2q^2}{21q+20}$$

oraz

$$B = -\frac{c}{21q+20cq^2} + \frac{c}{21q+20} - \frac{q^2}{21q+20} + \frac{q}{21+20cq}$$

nie zależą od m .

Istnienie kotrprzykładu dla nierówności podanej w treści zadania będzie udowodnione, jeżeli wykazemy istnienie takich m, q, c , że

$$Am + B < \frac{4m}{41}.$$

Powyższa nierówność będzie spełniona dla odpowiednio dużych m , jeżeli dobierzemy takie q, c , że $A < \frac{4}{41}$.

Z kolei przy ustalonym q i przy c dążącym do 0 otrzymujemy

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} A = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{21cq+20q^2} + \frac{c}{21q+20cq^2} + \frac{2q^2}{21q+20} \right) = \frac{1}{20q^2} + \frac{2q^2}{21q+20},$$

a zatem wystarczy wybrać q spełniające nierówność

$$\frac{1}{20q^2} + \frac{2q^2}{21q+20} < \frac{4}{41},$$

czyli równoważnie

$$\begin{aligned} 41 \cdot (21q+20) + 41 \cdot 20q^2 \cdot 2q^2 & < 4 \cdot (21q+20) \cdot 20q^2 \\ 861q + 820 + 1640q^4 & < 1680q^3 + 1600q^2 \end{aligned}$$



oraz przyjąć, że c jest odpowiednio małą liczbą rzeczywistą dodatnią.

Niech $q = 1,1$. Wówczas ostatnia nierówność przyjmuje kolejno postać

$$861 \cdot 1,1 + 820 + 1640 \cdot 1,4641 < 1680 \cdot 1,331 + 1600 \cdot 1,21$$

$$947,1 + 820 + 2401,124 < 2236,08 + 1936$$

$$4168,224 < 4172,08,$$

jest więc prawdziwa.

Konstrukcja kotrprzykładu została zakończona.

Uwaga: Obliczenia numeryczne pokazują, że dla $q = 1,1$ liczba $c = 0,025$ jest zbyt duża, ale można wybrać np. $c = 0,024$ oraz $m = 10517$ lub $c = 0,00004$ oraz $m = 270$.

Można też przyjąć $q = 1,102$, $c = 0,00002$ oraz $m = 269$.