



## Liga Zadaniowa, Edycja IV, Seria 3, Zadania

**Zadanie 431.** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona wzorem

$$f(x) = \log_2(2^x + 1).$$

Udowodnić, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

**Zadanie 432.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{8} + \dots$$

będącego permutacją szeregu anharmonicznego (na przemian trzy wyrazy dodatnie i jeden ujemny).

**Zadanie 433.** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna na całej prostej rzeczywistej, a ponadto  $f'(0) = 1$ . Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiego  $\varepsilon > 0$ , że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej  $x < \varepsilon$  zachodzi nierówność

$$f'(x) > -\frac{1}{x}.$$

**Zadanie 434.** Interesują nas trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej, w których długość krótszej przyprostokątnej jest połową długości dłuższej przyprostokątnej pomniejszoną o 1.

Rozstrzygnąć, czy:

- takie trójkąty nie istnieją,
- takie trójkąty istnieją, ale jest ich skończenie wiele (z dokładnością do przystawania),
- takich trójkątów jest nieskończenie wiele (z dokładnością do przystawania).

**Zadanie 435.** Interesują nas rozwiązania równania

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k+1}$$

w liczbach całkowitych dodatnich  $k < n$ .

Rozstrzygnąć, czy:

- takie rozwiązania nie istnieją,
- takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
- takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

Do udziału w **Edycji IV** uprawnieni są **wyłącznie** studenci **drugiego semestru** studiów na kierunku matematyka, którzy podpisali deklarację uczestnictwa w projekcie „**Matematyka na UWr – studia pełne możliwości**”.

Rozwiązania zadań należy składać do **wtorku 20 listopada 2012 r. do godz. 12:00**.

Każdą oddawaną kartkę należy opatrzyć nagłówkiem:

**Liga Zadaniowa Studiów Zamawianych, Edycja IV.**

Na jednej kartce nie wolno łączyć rozwiązań różnych zadań. Każda kartka powinna być podpisana imieniem i nazwiskiem zawodnika oraz numerem zadania. W przypadku rozwiązania zadania zajmującego więcej niż jedną kartkę, kartki należy ponumerować, a na kartce nr 1 podać liczbę kartek składających się na rozwiązanie zadania.

Rozwiązanie powinno zawierać nie tylko odpowiedź na zadane pytanie, ale również dowód jej poprawności.

Prace zanosimy na portiernię i prosimy portiera o włożenie do pudła z napisem

**Liga Zadaniowa Studiów Zamawianych**

*Liga Zadaniowa, Edycja IV, Seria 3, Zadania*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego