Liga Zadaniowa, Edycja IV, Seria 4 (waga 2), Rozwiązania

Zadanie 441. Wyznaczyć kresy zbioru $\left\{\frac{1}{2^n-31^m} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$, gdzie $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie:

Liczba 1 jest elementem danego w treści zadania zbioru, gdyż dla $n=5$ oraz $m=1$ mamy

$$\frac{1}{2^n-31^m}=\frac{1}{2^5-31^1}=\frac{1}{32-31}=1\,.$$

Ponadto każdy element zbioru jest ułamkiem o liczniku 1 i całkowitym mianowniku, jest więc mniejszy lub równy 1.

Stąd wynika, że kres górny zbioru jest równy 1.

Każdy ujemny element zbioru ma postać

$$\frac{1}{2^n-31^m}=-\frac{1}{31^m-2^n}\,,$$

gdzie $31^m>2^n$.

Potęgi dwójki przy dzieleniu przez 31 dają cyklicznie 5 reszt: 1, 2, 4, 8, 16. Zatem każda liczba postaci 31^m-2^n daje przy dzieleniu przez 31 odpowiednio jedną z reszt: 30, 29, 27, 23, 15. Stąd wynika, że dla liczb dodatnich tej postaci zachodzi nierówność $31^m-2^n\geqslant 15$, przy czym równość jest osiągana np. dla $m=1$ oraz $n=4$.

Zatem każdy ujemny element danego zbioru jest większy lub równy $-1/15$, a ponieważ liczba ta jest elementem zbioru, jest ona jednocześnie kresem dolnym.

Odpowiedź: Kres górny zbioru jest równy 1, a kres dolny $-1/15$.

Zadanie 442. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, t zachodzi nierówność

$$x^x\cdot y^y\cdot z^z\cdot t^t\geqslant (xyzt)^{(x+y+z+t)/4}\,.$$

Rozwiązanie:

Z uwagi na symetrię, możemy bez szkody dla ogólności rozwiązania założyć, że

$$x\geqslant y\geqslant z\geqslant t\,.$$

Podnosząc daną w zadaniu nierówność stronami do czwartej potęgi i wykonując dalsze przekształcenia otrzymujemy nierówności równoważne:

$$x^{4x}\cdot y^{4y}\cdot z^{4z}\cdot t^{4t}\geqslant (xyzt)^{x+y+z+t}$$

$$x^{4x}\cdot y^{4y}\cdot z^{4z}\cdot t^{4t}\geqslant x^{x+y+z+t}\cdot y^{x+y+z+t}\cdot z^{x+y+z+t}\cdot t^{x+y+z+t}$$

$$x^{3x-y-z-t}\cdot y^{3y-x-z-t}\cdot z^{3z-x-y-t}\cdot t^{3t-x-y-z}\geqslant 1$$

$$x^{x-y}\cdot x^{x-z}\cdot x^{x-t}\cdot y^{y-x}\cdot y^{y-z}\cdot y^{y-t}\cdot z^{z-x}\cdot z^{z-y}\cdot z^{z-t}\cdot t^{t-x}\cdot t^{t-y}\cdot t^{t-z}\geqslant 1$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}\cdot\left(\frac{x}{z}\right)^{x-z}\cdot\left(\frac{x}{t}\right)^{x-t}\cdot\left(\frac{y}{z}\right)^{y-z}\cdot\left(\frac{y}{t}\right)^{y-t}\cdot\left(\frac{z}{t}\right)^{z-t}\geqslant 1\,.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jednak ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż każdy czynnik występujący po lewej stronie jest większy lub równy 1, jako potęga o podstawie większej lub równej 1 i nieujemym wykładniku.

Zadanie 443. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$9\cdot(3n)!\cdot(4n+1)\leqslant 10\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3 .$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ lewa strona danej w zadaniu nierówności jest równa $9\cdot 6\cdot 5=270$, a prawa $10\cdot 3^3=270$. Zatem dana nierówność staje się równością, czyli jest prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że

$$9\cdot(3n)!\cdot(4n+1)\leqslant 10\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3 .$$

Wykażemy, że wówczas

$$9\cdot(3n+3)!\cdot(4n+5)\leqslant 10\cdot\left(3^{n+1}\cdot(n+1)!\right)^3 .$$

Przekształcając lewą stronę powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$9\cdot(3n+3)!\cdot(4n+5)=9\cdot(3n)!\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(4n+5)=$$
$$=9\cdot(3n)!\cdot(4n+1)\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(4n+5)}{4n+1}\leqslant$$
$$\leqslant 10\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(4n+5)}{4n+1}=$$
$$=10\cdot\left(3^{n+1}\cdot(n+1)!\right)^3\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(4n+5)}{(4n+1)\cdot 9\cdot(n+1)^2},$$

co zakończy dowód indukcyjny, jeżeli wykażemy, że

$$\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(4n+5)}{(4n+1)\cdot 9\cdot(n+1)^2}\leqslant 1 .$$

Przekształcanie powyższej nierówności prowadzi do ciągu nierówności równoważnych:

$$(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(4n+5)\leqslant(4n+1)\cdot 9\cdot(n+1)^2$$
$$(4n+5)\cdot\left(9n^2+9n+2\right)\leqslant(4n+1)\cdot\left(9n^2+18n+9\right)$$
$$36n^3+36n^2+8n+45n^2+45n+10\leqslant 36n^3+72n^2+36n+9n^2+18n+9$$
$$36n^3+81n^2+53n+10\leqslant 36n^3+81n^2+54n+9$$
$$1\leqslant n ,$$

a zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa.

Zadanie 444. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$9\cdot(3n)!\cdot(4n+1)>\frac{39}{4}\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3 .$$

Rozwiązanie:

Najpierw przeprowadzimy dowód indukcyjny nierówności

$$9\cdot(3n)!\cdot(9n+2)\geqslant 22\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3 . \qquad (\diamondsuit)$$

1° Dla $n=1$ lewa strona nierówności $(\diamondsuit)$ jest równa $9\cdot 6\cdot 11=594$, natomiast prawa $22\cdot 3^3=594$. Zatem nierówność $(\diamondsuit)$ staje się równością, czyli jest prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że

$$9\cdot(3n)!\cdot(9n+2)\geqslant 22\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3 .$$

Wykażemy, że wówczas

$$9\cdot(3n+3)!\cdot(9n+11)\geqslant 22\cdot\left(3^{n+1}\cdot(n+1)!\right)^3 . \qquad (\clubsuit)$$

Przekształcając lewą stronę nierówności $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$9\cdot(3n+3)!\cdot(9n+11)=9\cdot(3n)!\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(9n+11)=$$
$$=9\cdot(3n)!\cdot(9n+2)\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(9n+11)}{9n+2}\geqslant$$
$$\geqslant 22\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(9n+11)}{9n+2}=$$
$$=22\cdot\left(3^{n+1}\cdot(n+1)!\right)^3\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(9n+11)}{(9n+2)\cdot 9\cdot(n+1)^2},$$

co zakończy dowód indukcyjny nierówności $(\diamondsuit)$, jeżeli wykażemy, że

$$\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(9n+11)}{(9n+2)\cdot 9\cdot(n+1)^2}\geqslant 1 .$$

Przekształcanie powyższej nierówności prowadzi do ciągu nierówności równoważnych:

$$(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(9n+11)\geqslant(9n+2)\cdot 9\cdot(n+1)^2$$
$$(9n+11)\cdot\left(9n^2+9n+2\right)\geqslant(9n+2)\cdot\left(9n^2+18n+9\right)$$
$$81n^3+81n^2+18n+99n^2+99n+22\geqslant 81n^3+162n^2+81n+18n^2+36n+18$$
$$81n^3+180n^2+117n+22\geqslant 81n^3+180n^2+117n+18$$
$$4\geqslant 0,$$

co jest prawdą dla każdej liczby naturalnej n.

Teraz korzystając z nierówności $(\diamondsuit)$ udowodnimy nierówność daną w treści zadania.

$$9\cdot(3n)!\cdot(4n+1)>9\cdot(3n)!\cdot(4n+8/9)=9\cdot(3n)!\cdot(9n+2)\cdot\frac{4}{9}\geqslant 22\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3\cdot\frac{4}{9}=$$
$$=\frac{88}{9}\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3=9,(7)\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3>9,75\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3=\frac{39}{40}\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3 .$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 445. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$ spełniających warunki

$$\sum_{k=1}^{9} x_k^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{9} k x_k = 17$$

zachodzą nierówności

$$\frac{1}{11} < \sum_{k=1}^{9} x_k^k < \frac{1}{10}\,.$$

Rozwiązanie:

Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$ będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi równanie

$$\sum_{k=1}^{9} x_k^2 = 1$$

i niech

$$v = (x_1, x_2, x_3\,, \ldots, x_9)$$

będzie wektorem w $\mathbb{R}^9$. Wówczas wektor v ma długość 1.

Z uwagi na równość

$$\sum_{k=1}^{9} k^2 = \frac{9\cdot 10\cdot 19}{6} = 285$$

wektor

$$w = \left(\frac{1}{\sqrt{285}}, \frac{2}{\sqrt{285}}, \frac{3}{\sqrt{285}}, \ldots, \frac{9}{\sqrt{285}}\right)$$

również ma długość 1.

Zatem iloczyn skalarny wektorów w oraz v jest mniejszy lub równy 1, skąd

$$\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{k}{\sqrt{285}}\cdot x_k\right) \leqslant 1\,,$$

co prowadzi do

$$\sum_{k=1}^{9} k x_k \leqslant \sqrt{285} < \sqrt{289} = 17\,.$$

Stąd wynika, że liczby rzeczywiste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$ spełniające warunki podane w założeniach zadania nie istnieją.

Wobec tego z założeń zadania wynika każda teza, jaką byśmy w przypływie fantazji zdecydowali się umieścić w treści zadania.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego