



Liga Zadaniowa, Edycja V, Seria 1, Rozwiązania

Zadanie 511. Potęgą nazwiemy każdą liczbę postaci a^b , gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi, a przy tym $b > 1$.

Rozstrzygnąć, czy istnieje rozwiązanie równania

$$x^5 \cdot y^6 = z^7$$

w liczby całkowitych dodatnich x, y, z niebędących potęgami.

Rozwiązanie:

Tak, takim rozwiązaniem jest np. $x = 2^3 \cdot 3^2$, $y = 2 \cdot 3^3$, $z = 2^3 \cdot 3^4$.

Istotnie, liczby x, y, z nie są potęgami, a ponadto

$$x^5 \cdot y^6 = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 2^6 \cdot 3^{18} = 2^{21} \cdot 3^{28}$$

oraz

$$z^7 = 2^{21} \cdot 3^{28},$$

skąd wynika, że liczby x, y, z są rozwiązaniem danego równania.

Zadanie 512. Udowodnić nierówności

$$n^{2000^{11}} < 2^n < n^{2222^{11}}$$

dla wskazanej przez siebie liczby naturalnej n

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $n = 2^{128}$. Wówczas

$$2^n = 2^{2^{128}} = 2^{2^7 \cdot 2^{121}} = 2^{2^7 \cdot 2^{121}} = (2^{128})^{2^{121}} = n^{2^{11 \cdot 11}} = n^{(2^{11})^{11}} = n^{2048^{11}}.$$

Teza zadania wynika teraz z nierówności

$$n^{2000^{11}} < n^{2048^{11}} < n^{2222^{11}}.$$

Zadanie 513. Wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze p , że liczby $6p-1$, $6p+1$, $12p-1$, $12p+1$ są pierwsze.

Rozwiązanie:

Założmy, że p jest liczbą spełniającą warunki zadania.

Wśród pięciu kolejnych liczb

$$12p-2 = 2 \cdot (6p-1), \quad 12p-1, \quad 12p = 12 \cdot p, \quad 12p+1, \quad 12p+2 = 2 \cdot (6p+1)$$

dokładnie jedna jest podzielna przez 5. Zatem jedna z liczb p , $6p-1$, $6p+1$, $12p-1$, $12p+1$ jest podzielna przez 5. Skoro liczba ta jest pierwsza, to musi być równa 5. Ponieważ $p \geq 2$, jedyną z tych liczb, która może być równa 5, jest p .

Pozostaje sprawdzić, że dla $p = 5$ otrzymujemy liczby pierwsze 29, 31, 59, 61.

Odpowiedź: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $p = 5$.



Zadanie 514. Interesują nas nietrywialne (tzn. spełniające warunek $m \neq n \neq k \neq m$) rozwiązania równania

$$m^{m^m} = k^{n^n}$$

w liczbach naturalnych m, n, k większych od 1.

Rozstrzygnąć, czy:

- a) takie rozwiązania nie istnieją,
- b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
- c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

PRZYPOMNIENIE: Potęgowanie wykonujemy **od góry**: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że podane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających określone w zadaniu warunki.

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną większą od 1 i niech $m = nt$, gdzie t jest dowolną liczbą naturalną większą od 1. Wówczas lewa strona danego w zadaniu równania jest równa

$$m^{m^m} = (nt)^{(nt)^{nt}} = (nt)^{n^nt^{nt}} = (nt)^{n^n n^{n(t-1)t^{nt}}} = \left((nt)^{n^{n(t-1)t^{nt}}} \right)^{n^n},$$

skąd wynika, że otrzymamy rozwiązanie danego równania przyjmując

$$k = (nt)^{n^{n(t-1)t^{nt}}}.$$

Zadanie 515. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^{\ln \ln n}}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c , gdzie $a \neq 1$, zachodzą równości

$$b^{\log_a c} = \left(a^{\log_a b} \right)^{\log_a c} = a^{\log_a b \cdot \log_a c} = \left(a^{\log_a c} \right)^{\log_a b} = c^{\log_a b}.$$

Przyjmując $a = e$, $b = \ln n$, $c = n$ otrzymujemy

$$(\ln n)^{\ln n} = n^{\ln \ln n},$$

skąd wynika, że wszystkie wyrazy danego w zadaniu szeregu są równe 1, a zatem szereg ten jest rozbieżny.