



Liga Zadaniowa, Edycja V, Seria 2, Zadania

Zadanie 521. Rozwiązać równanie

$$x = 2 \cdot [x] \cdot \{x\}$$

w liczbach rzeczywistych dodatnich x .

Uwaga: $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby x .

Zadanie 522. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 2$, dla których prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, spełniających równości

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \binom{2n-2}{n-1}^2 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n x_i = \frac{2^{2n+1}}{13},$$

zachodzi nierówność

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j > \frac{2^{4n-2}}{21}.$$

Zadanie 523. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną n nazwiemy *mocno złożoną*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy jest mniejszy od $\sqrt{n}$.

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb naturalnych mocno złożonych.

Zadanie 524. Wyznaczyć kres górny zbioru liczb postaci

$$abc + bcd + cde + dea + eab,$$

gdzie a, b, c, d, e przebiegają wszystkie piątki liczb rzeczywistych nieujemnych spełniających warunek

$$a + b + c + d + e = 5.$$

Zadanie 525. Wyznaczyć kres górny zbioru liczb postaci

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab,$$

gdzie a, b, c, d, e, f przebiegają wszystkie szóstki liczb rzeczywistych nieujemnych spełniających warunek

$$a + b + c + d + e + f = 6.$$

Do udziału w **Edycji V** uprawnieni są **wyłącznie** studenci **drugiego semestru** studiów na kierunku matematyka, którzy podpisali deklarację uczestnictwa w projekcie „**Matematyka na UW – studia pełne możliwości**”.

Rozwiązania zadań należy składać do **wtorku 19 marca 2013 r. do godz. 12:00**.

Każdą oddawaną kartkę należy opatrzyć nagłówkiem:

Liga Zadaniowa Studiów Zamawianych, Edycja V.

Na jednej kartce nie wolno łączyć rozwiązań różnych zadań. Każda kartka powinna być podpisana imieniem i nazwiskiem zawodnika oraz numerem zadania. W przypadku rozwiązania zadania zajmującego więcej niż jedną kartkę, kartki należy ponumerować, a na kartce nr 1 podać liczbę kartek składających się na rozwiązanie zadania.

Rozwiązanie powinno zawierać nie tylko odpowiedź na zadane pytanie, ale również dowód jej poprawności.

Prace zanosimy na portiernię i prosimy portiera o włożenie do pudła z napisem

Liga Zadaniowa Studiów Zamawianych

Liga Zadaniowa, Edycja V, Seria 2, Zadania

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego