



Liga Zadaniowa, Edycja V, Seria 2, Rozwiązania

Zadanie 521. Rozwiązać równanie

$$x = 2 \cdot [x] \cdot \{x\}$$

w liczbach rzeczywistych dodatnich x .

Uwaga: $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby x .

Rozwiązanie:

Oznaczmy $n = [x]$ oraz $a = \{x\}$. Wówczas dane w zadaniu równanie przyjmuje postać

$$n + a = 2an,$$

co przekształcamy kolejno jako

$$2an - a - n = 0,$$

$$2an - a - n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$4an - 2a - 2n + 1 = 1,$$

$$(2a - 1) \cdot (2n - 1) = 1,$$

$$2a - 1 = \frac{1}{2n - 1},$$

$$a = \frac{\frac{1}{2n-1} + 1}{2} = \frac{\frac{2n}{2n-1}}{2} = \frac{n}{2n-1}.$$

Dla $n = 1$ otrzymujemy $a = 1$, co nie spełnia warunków zadania, jednak dla każdego $n \geq 2$ dostajemy rozwiązanie danego równania.

Odpowiedź: Równanie ma rozwiązania dodatnie dane wzorem

$$x = n + \frac{n}{2n-1},$$

gdzie n przebiega liczby naturalne większe od 1.

Zadanie 522. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 2$, dla których prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, spełniających równości

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \binom{2n-2}{n-1}^2 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n x_i = \frac{2^{2n+1}}{13},$$

zachodzi nierówność

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j > \frac{2^{4n-2}}{21}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy

$$K = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad S = \sum_{i=1}^n x_i, \quad T = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$



Wówczas $S^2 = K + 2T$, skąd

$$T = \frac{S^2 - K}{2}.$$

Jeżeli

$$K = \binom{2n-2}{n-1}^2 \quad \text{oraz} \quad S = \frac{2^{2n+1}}{13},$$

to

$$T = \frac{S^2 - K}{2} = \frac{\left(\frac{2^{2n+1}}{13}\right)^2 - \binom{2n-2}{n-1}^2}{2} < \frac{\left(\frac{2^{2n+1}}{13}\right)^2}{2} = \frac{2^{4n+1}}{169} < \frac{2^{4n+1}}{168} = \frac{2^{4n-2}}{21},$$

a więc dana w tezie zadania nierówność jest fałszywa, gdyż udowodniliśmy jej prawdziwość w przeciwną stronę.

Zatem rozwiązanie zadania wydaje się zakończone z odpowiedzią: Nie ma liczb naturalnych spełniających warunki zadania.

Tymczasem nie doszliśmy jeszcze do głównej trudności zadania. Należy bowiem zbadać, dla których n założenia zadania nie dopuszczają istnienia odpowiednich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Dla tych n nierówność podana w tezie zadania spełniona będzie w próżni.

W tym celu skorzystamy z nierówności Cauchy'ego-Schwarza, którą można zaprezentować w języku iloczynu skalarnego.

Rozważmy następujące dwa wektory w $\mathbb{R}^n$:

$$v = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$w = \left(\sqrt{\frac{K}{n}}, \sqrt{\frac{K}{n}}, \sqrt{\frac{K}{n}}, \dots, \sqrt{\frac{K}{n}} \right),$$

gdzie, jak poprzednio, $K = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Wówczas oba wektory mają długość $\sqrt{K}$, a ich iloczyn skalarny, przy odpowiednim wyborze wektora v , może przyjmować dowolną wartość z przedziału $[-K, K]$.

Ponieważ iloczyn skalarny wektorów v i w jest równy

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i \cdot \sqrt{\frac{K}{n}} \right) = \sqrt{\frac{K}{n}} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sqrt{\frac{K}{n}} \cdot S,$$

zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{K}{n}} \cdot S \leq K,$$

co jest równoważne nierówności

$$S \leq \sqrt{Kn},$$

czyli

$$S^2 \leq Kn.$$

Oznacza to, że warunki zadania są spełnione przez te liczby n , dla których zachodzi nierówność $S^2 > Kn$, wykluczająca istnienie liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.



Zapiszmy tę nierówność w postaci

$$\frac{S^2}{Kn} > 1,$$

czyli

$$\frac{2^{4n+2}}{169n \cdot \binom{2n-2}{n-1}^2} > 1.$$

Oznaczmy

$$a_n = \frac{2^{4n+2}}{169n \cdot \binom{2n-2}{n-1}^2}$$

i oszacujmy iloraz

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{4n+6}}{169 \cdot (n+1) \cdot \binom{2n}{n}^2} \cdot \frac{169n \cdot \binom{2n-2}{n-1}^2}{2^{4n+2}} = \frac{16n \cdot n^4}{(n+1) \cdot (2n)^2 \cdot (2n-1)^2} = \\ &= \frac{4n^3}{(n+1) \cdot (2n-1)^2} = \frac{4n^3}{(n+1) \cdot (4n^2 - 4n + 1)} = \frac{4n^3}{4n^3 - 4n^2 + n + 4n^2 - 4n + 1} = \\ &= \frac{4n^3}{4n^3 - 3n + 1} = \frac{4n^3}{4n^3 - (3n-1)} > 1. \end{aligned}$$

Zatem ciąg (a_n) jest rosnący. Ponieważ interesuje nas wyznaczenie jego wyrazów większych od 1, wystarczy wskazać dwa kolejne wyrazy, z których jeden jest mniejszy, a drugi większy od 1.

Dla $n = 4$ mamy

$$a_4 = \frac{2^{18}}{169 \cdot 4 \cdot \binom{6}{3}^2} = \frac{2^{18}}{169 \cdot 4 \cdot 20^2} = \left(\frac{2^9}{13 \cdot 40} \right)^2 = \left(\frac{512}{520} \right)^2 < 1.$$

Z kolei dla $n = 5$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{2^{22}}{169 \cdot 5 \cdot \binom{8}{4}^2} = \frac{2^{22}}{169 \cdot 5 \cdot 70^2} = \left(\frac{2^{11}}{13 \cdot \sqrt{5} \cdot 70} \right)^2 > \left(\frac{2^{11}}{13 \cdot \sqrt{\frac{81}{16}} \cdot 70} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{2^{11}}{13 \cdot \frac{9}{4} \cdot 70} \right)^2 = \left(\frac{2^{13}}{13 \cdot 9 \cdot 70} \right)^2 = \left(\frac{2^{13}}{9 \cdot 910} \right)^2 = \left(\frac{8192}{8190} \right)^2 > 1. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają wszystkie liczby naturalne $n \geq 5$.

Zadanie 523. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną n nazwiemy *mocno złożoną*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy jest mniejszy od $\sqrt{n}$.

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb naturalnych mocno złożonych.

Rozwiązanie:

Dla liczby całkowitej dodatniej k rozważmy trzy kolejne liczby naturalne:

$$4k^4 - 1 = (2k^2 - 1) \cdot (2k^2 + 1),$$



$$4k^4 = 2 \cdot 2 \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k,$$

$$4k^4 + 1 = (2k^2 - 2k + 1) \cdot (2k^2 + 2k + 1).$$

Liczby te spełniają warunki zadania, o ile czynniki $2k^2 + 1$ oraz $2k^2 + 2k + 1$ są złożone.

Jeżeli liczba k jest większa od 1 i daje resztę 1 przy dzieleniu przez 15, to liczba $2k^2 + 1$ jest złożona jako podzielna przez 3 i większa od 3, natomiast liczba $2k^2 + 2k + 1$ jest złożona jako podzielna przez 5 i większa od 5.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają podane wyżej liczby, gdzie liczba naturalna k jest większa od 1 i daje resztę 1 przy dzieleniu przez 15.

Zadanie 524. Wyznaczyć kres górny zbioru liczb postaci

$$abc + bcd + cde + dea + eab,$$

gdzie a, b, c, d, e przebiegają wszystkie piątki liczb rzeczywistych nieujemnych spełniających warunki

$$a + b + c + d + e = 5.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Zauważmy, że dany w zadaniu zbiór jest ograniczony z góry, gdyż z warunków zadania wynika, że liczby a, b, c, d, e są nie większe od 5, a to z kolei prowadzi do oszacowania

$$abc + bcd + cde + dea + eab \leq 5 \cdot 5^3 = 5^4 = 625.$$

Wobec tego szukany kres górny jest skończony i oznaczmy go przez K . Wykażemy, że K jest elementem danego zbioru.

Niech dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n , liczby a_n, b_n, c_n, d_n, e_n spełniają warunki

$$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 5$$

oraz

$$a_n b_n c_n + b_n c_n d_n + c_n d_n e_n + d_n e_n a_n + e_n a_n b_n > K - \frac{1}{n}.$$

Istnienie takich liczb wynika z definicji kresu górnego.

Ponieważ ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony, można z niego wybrać podciąg zbieżny

$$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}.$$

Ponieważ ciąg $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony, można z niego wybrać podciąg zbieżny

$$(b_{n_{k_i}})_{i=1}^{\infty}.$$

Ponieważ ciąg $(c_{n_{k_i}})_{i=1}^{\infty}$ jest ograniczony, można z niego wybrać podciąg zbieżny

$$(c_{n_{k_{i_j}}})_{j=1}^{\infty}.$$

Ponieważ ciąg $(d_{n_{k_{i_j}}})_{j=1}^{\infty}$ jest ograniczony, można z niego wybrać podciąg zbieżny

$$(d_{n_{k_{i_j m}}})_{m=1}^{\infty}.$$

Otrzymujemy zatem zbieżne ciągi

$$\left(a_{n_{k_{ijm}}}\right)_{m=1}^{\infty}, \quad \left(b_{n_{k_{ijm}}}\right)_{m=1}^{\infty}, \quad \left(c_{n_{k_{ijm}}}\right)_{m=1}^{\infty}, \quad \left(d_{n_{k_{ijm}}}\right)_{m=1}^{\infty},$$

a wobec równości

$$e_{n_{k_{ijm}}} = 5 - a_{n_{k_{ijm}}} - b_{n_{k_{ijm}}} - c_{n_{k_{ijm}}} - d_{n_{k_{ijm}}}$$

zbieżny jest także ciąg

$$\left(e_{n_{k_{ijm}}}\right)_{m=1}^{\infty}.$$

Niech teraz

$$a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_{k_{ijm}}},$$

$$b = \lim_{m \rightarrow \infty} b_{n_{k_{ijm}}},$$

$$c = \lim_{m \rightarrow \infty} c_{n_{k_{ijm}}},$$

$$d = \lim_{m \rightarrow \infty} d_{n_{k_{ijm}}},$$

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} e_{n_{k_{ijm}}}.$$

Wówczas przechodząc w nierównościach

$$K - \frac{1}{n} < a_{n_{k_{ijm}}} b_{n_{k_{ijm}}} c_{n_{k_{ijm}}} + b_{n_{k_{ijm}}} c_{n_{k_{ijm}}} d_{n_{k_{ijm}}} + c_{n_{k_{ijm}}} d_{n_{k_{ijm}}} e_{n_{k_{ijm}}} + d_{n_{k_{ijm}}} e_{n_{k_{ijm}}} a_{n_{k_{ijm}}} + e_{n_{k_{ijm}}} a_{n_{k_{ijm}}} b_{n_{k_{ijm}}} \leq K$$

z m do nieskończoności, na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$abc + bcd + cde + dea + eab = K.$$

Udowodniliśmy, że kres górny danego zbioru jest osiągany, mamy więc do czynienia z zagadnieniem znalezienia największej wartości wyrażenia danego w treści zadania.

Dla $a = b = c = d = e = 1$ mamy $abc + bcd + cde + dea + eab = 5$, skąd wynika, że $K \geq 5$.

Niech teraz a, b, c, d, e będą liczbami, dla których osiągana jest największa wartość danego w zadaniu wyrażenia.

Gdyby którakolwiek z liczb a, b, c, d, e była równa 0, np. $e = 0$, dane w zadaniu wyrażenie miałoby wartość

$$\begin{aligned} abc + bcd &= (a+d)bc = \left(\sqrt[3]{(a+d)bc}\right)^3 \leq \left(\frac{(a+d)+b+c}{3}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{a+b+c+d+e}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27} < \frac{125}{25} = 5 \leq K. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że liczby a, b, c, d, e są dodatnie.

Przy ustalonych b, d, e spróbujmy zmieniać a, c zachowując ich sumę s . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} abc + bcd + cde + dea + eab &= (a+c)de + b(ac+cd+ae) = \\ &= sde + b \cdot (a(s-a) + (s-a)d + ae) = sde + bsd + b \cdot (as - a^2 - ad + ae) = \\ &= sde + bsd + b \cdot (a(s-d+e) - a^2) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= sde + bsd + b \cdot \left(\frac{(s-d+e)^2}{4} - \frac{(s-d+e)^2}{4} + a(s-d+e) - a^2 \right) = \\
 &= sde + bsd + b \cdot \left(\frac{(s-d+e)^2}{4} - \left(\frac{s-d+e}{2} - a \right)^2 \right) = \\
 &= sde + bsd + \frac{b(s-d+e)^2}{4} - b \cdot \left(\frac{s-d+e-2a}{2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Pierwsze trzy składniki ostatniej sumy zależą tylko od b, d, e, s , natomiast czwarty, gdyby był niezerowy, mógłby zostać zwiększony przez zmniejszenie lub zwiększenie liczby a kosztem c – ponieważ obie liczby są niezerowe, taka zmiana jest możliwa.

Skoro liczby a, b, c, d, e maksymalizują dane w zadaniu wyrażenie, a przy tym $b > 0$, musi zachodzić równość

$$s - d + e - 2a = 0,$$

czyli

$$c - d + e - a = 0,$$

co można zapisać jako

$$c + e = a + d.$$

Analogicznie dochodzimy do równości

$$c + e = b + d,$$

skąd $a = b$ i podobnie $b = c = d = e$. Wobec tego największa wartość wyrażenia jest przyjmowana dla $a = b = c = d = e = 1$.

Odpowiedź: Kres górny danego zbioru jest równy 5.

Sposób II:

Oznaczmy przez S sumę iloczynów daną w treści zadania i zauważmy, że

$$S = abc + bcd + cde + def + efa = a(b+d)(c+e) + cd(b+e-a).$$

Bez szkody dla ogólności rozwiązania możemy założyć, że a jest najmniejszą z liczb a, b, c, d, e .

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$(b+d)(c+e) \leq \left(\frac{b+d+c+e}{2} \right)^2 = \left(\frac{5-a}{2} \right)^2$$

oraz

$$cd(b+e-a) \leq \left(\frac{c+d+(b+e-a)}{3} \right)^3 = \left(\frac{5-2a}{3} \right)^3$$

zauważając, że $b+e-a = b+(e-a) \geq b \geq 0$.

Zatem

$$S \leq a \cdot \left(\frac{5-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{5-2a}{3} \right)^3.$$

Z tożsamości

$$\left(a \cdot \left(\frac{5-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{5-2a}{3} \right)^3 \right) = 5 - \frac{5(a-1)^2(a+8)}{108}$$



wynika nierówność $S \leq 5$, co w połączeniu z $S = 5$ dla $a = b = c = d = e = 1$ pozwala udzielić odpowiedzi:

Odpowiedź: Kres górny danego zbioru jest równy 5.

Zadanie 525. Wyznaczyć kres górny zbioru liczb postaci

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab,$$

gdzie a, b, c, d, e, f przebiegają wszystkie szóstki liczb rzeczywistych nieujemnych spełniających warunek

$$a + b + c + d + e + f = 6.$$

Rozwiązanie:

Niech a, b, c, d, e, f będą liczbami rzeczywistymi nieujemnymi spełniającymi warunek $a + b + c + d + e + f = 6$.

Przeprowadzamy następujące oszacowania, korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\begin{aligned} abc + bcd + cde + def + efa + fab &\leq abc + bcd + cde + def + efa + fab + ace + bdf = \\ &= (a+d)(b+e)(c+f) = \left(\sqrt[3]{(a+d)(b+e)(c+f)} \right)^3 \leq \left(\frac{(a+d) + (b+e) + (c+f)}{3} \right)^3 = \\ &= \left(\frac{a+b+c+d+e+f}{3} \right)^3 = \left(\frac{6}{3} \right)^3 = 2^3 = 8. \end{aligned}$$

Ponieważ każdy element danego w zadaniu zbioru jest nie większy od 8, kres górny tego zbioru jest nie większy od 8.

Pozostaje zauważyć, że liczba 8 jest elementem tego zbioru, gdyż wystarczy przyjąć $a = b = c = 2$ oraz $d = e = f = 0$.

Odpowiedź: Kres górny danego zbioru jest równy 8.