



## Liga Zadaniowa, Edycja V, Seria 4 (waga 2), Rozwiązania

**Zadanie 541.** Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^n + 2^{1035}.$$

*Rozwiązanie:*

*Sposób I*

Jeżeli  $n \leq 1024$ , to daną w zadaniu nierówność dowodzimy przez bezpośrednie szacowanie:

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^{1025} \cdot 1024 = 2^{1025} \cdot 2^{10} = 2^{1035} < 2^n + 2^{1035}.$$

Dla pozostałych  $n$  przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° W przypadku  $n = 1025$  dana w zadaniu nierówność jest równością, gdyż

$$2^{1025} \cdot n = 2^{1025} \cdot 1025 = 2^{1025} \cdot (1 + 2^{10}) = 2^{1025} + 2^{1035} = 2^n + 2^{1035}.$$

2° Niech  $n \geq 1025$  będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^n + 2^{1035}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$2^{1025} \cdot (n+1) \leq 2^{n+1} + 2^{1035}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności  $n \geq 1025$ , otrzymujemy:

$$2^{1025} \cdot (n+1) = 2^{1025} + 2^{1025} \cdot n \leq 2^{1025} + 2^n + 2^{1035} \leq 2^n + 2^n + 2^{1035} = 2^{n+1} + 2^{1035}.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej, dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1025$ , co w połączeniu z bezpośrednimi szacowaniami dla  $n \leq 1024$  kończy rozwiązanie zadania.

*Sposób II*

W przypadku  $n \geq 1025$  możemy przeprowadzić następujący dowód.

Dzieląc stronami daną w zadaniu nierówność przez  $2^{1025}$  i podstawiając  $n = k + 1025$ , gdzie  $k \geq 0$ , otrzymujemy kolejno nierówności równoważne:

$$n \leq 2^{n-1025} + 2^{10},$$

$$k + 1025 \leq 2^k + 1024,$$

$$k + 1 \leq 2^k.$$

Powyższą nierówność można uzasadnić wykorzystując wzór dwumianowy Newtona

$$2^k = (1+1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \geq \sum_{i=0}^k 1 = k+1$$

lub nieco inaczej

$$2^k = (1+1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \geq \binom{k}{0} + \binom{k}{1} = k+1.$$



**Zadanie 542.** Rozstrzygnąć, czy suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2013n}$$

jest liczbą wymierną czy niewymierną.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że zachodzą następujące tożsamości

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2 + 2013n} &= \frac{1}{n \cdot (n + 2013)} = \frac{1}{2013} \cdot \frac{2013}{n \cdot (n + 2013)} = \\ &= \frac{1}{2013} \cdot \frac{n + 2013 - n}{n \cdot (n + 2013)} = \frac{1}{2013} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 2013} \right). \end{aligned}$$

Zatem dla  $N \geq 2013$  dany w zadaniu szereg ma  $N$ -tą sumę częściową równą

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 + 2013n} = \frac{1}{2013} \cdot \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 2013} \right) = \frac{1}{2013} \cdot \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n + 2013} \right) = \\ &= \frac{1}{2013} \cdot \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2014}^{N+2013} \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2013} \cdot \left( \sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{N+2013} \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{N+2013} \frac{1}{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{N+n} = \sum_{n=1}^{2013} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+n} = \sum_{n=1}^{2013} 0 = 0,$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2013n} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{2013} \cdot \sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{n}.$$

**Odpowiedź:** Suma szeregu danego w treści zadania jest liczbą wymierną.

**Zadanie 543.** Dany jest taki wielomian  $W(x)$  stopnia  $2^{16}$  o współczynnikach rzeczywistych, że  $W(n) = 2^n$  dla  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^{16}$ . Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna  $m > 2^{16}$ , że  $W(m)$  jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym dodatnim.

*Rozwiązanie:*

Ponieważ wielomian stopnia nie większego niż  $d$  jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wartości w  $d + 1$  punktach, istnieje co najwyżej jeden wielomian  $W(x)$  spełniający założenia zadania.

Zauważmy, że założenia zadania są spełnione przez wielomian

$$W(x) = \sum_{i=0}^{2^{16}} \binom{x}{i},$$

gdzie współczynnik dwumianowy można zdefiniować jako wielomian

$$\binom{x}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (x-i)}{k!},$$

przyjmując przy tym konwencję, według której iloczyn zera czynników jest równy 1.



Istotnie, dla  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^{16}$ , korzystając z równości  $\binom{n}{i} = 0$  przy  $n < i$ , otrzymujemy

$$W(n) = \sum_{i=0}^{2^{16}} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n,$$

gdzie ostatnia równość wynika z tego, że suma wyrazów w  $n$ -tym wierszu trójkąta Pascala jest równa  $2^n$ .

Przyjmijmy  $m = 2^{17} + 1$ . Wówczas

$$\begin{aligned} W(m) &= \sum_{i=0}^{2^{16}} \binom{m}{i} = \sum_{i=0}^{2^{16}} \binom{2^{17}+1}{i} = \sum_{i=0}^{2^{16}} \binom{2^{17}+1}{2^{17}+1-i} = \sum_{i=2^{16}+1}^{2^{17}+1} \binom{2^{17}+1}{i} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=0}^{2^{16}} \binom{2^{17}+1}{i} + \sum_{i=2^{16}+1}^{2^{17}+1} \binom{2^{17}+1}{i} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{2^{17}+1} \binom{2^{17}+1}{i}. \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnia suma jest sumą wyrazów trójkąta Pascala w wierszu o numerze  $2^{17} + 1$ , jest ona równa  $2^{2^{17}+1}$ , skąd

$$W(m) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{2^{17}+1} \binom{2^{17}+1}{i} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{17}+1} = 2^{2^{17}}.$$

**Odpowiedź:** Dla  $m = 2^{17} + 1$  wielomian przyjmuje wartość będącą potęgą dwójki, a mianowicie  $2^{2^{17}}$ .

**Zadanie 544.** Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  liczba  $2553^n - 64$  jest złożona.

*Rozwiązanie:*

1° Zauważmy, że

$$2553 \equiv 7 \pmod{19},$$

a ponadto

$$7^3 = 343 \equiv 1 \pmod{19},$$

skąd wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej  $k$

$$2553^{3k+1} \equiv 7^{3k+1} = (7^3)^k \cdot 7 \equiv 1^k \cdot 7 = 7 \pmod{19}.$$

Ponieważ także

$$64 \equiv 7 \pmod{19},$$

otrzymujemy

$$2553^{3k+1} - 64 \equiv 0 \pmod{19}.$$

Zatem dana w zadaniu liczba jest złożona (jako podzielna przez 19 i większa od 19), jeżeli liczba  $n$  przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

2° Podobnie

$$2553 \equiv 46 \pmod{109},$$

skąd

$$2553^2 \equiv 46^2 = 2116 \equiv 45 \pmod{109}$$



oraz

$$2553^3 \equiv 46 \cdot 45 = 2070 \equiv -1 \pmod{109}.$$

Wobec tego

$$2553^6 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{109},$$

a także

$$2553^5 = 2553^3 \cdot 2553^2 \equiv (-1) \cdot 45 = -45 \equiv 64 \pmod{109}.$$

Stąd wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej  $k$

$$2553^{6k+5} = (2553^6)^k \cdot 2553^5 \equiv 1^k \cdot 64 = 64 \pmod{109}.$$

Otrzymujemy więc

$$2553^{6k+5} - 64 \equiv 0 \pmod{109}.$$

Zatem dana w zadaniu liczba jest złożona (jako podzielna przez 109 i większa od 109), jeżeli liczba  $n$  przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5.

3° W przypadku, gdy liczba  $n$  jest parzysta, dana w zadaniu liczba jest złożona jako różnica kwadratów, gdyż możemy wówczas skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia.

Niech bowiem  $n = 2k$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą dodatnią. Wtedy

$$2553^{2k} - 64 = (2553^k)^2 - 8^2 = (2553^k - 8) \cdot (2553^k + 8),$$

gdzie oba czynniki są większe od 1.

4° W przypadku, gdy liczba  $n$  jest podzielna przez 3, dana w zadaniu liczba jest złożona jako różnica sześciątów, gdyż możemy wówczas skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia.

Niech bowiem  $n = 3k$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą dodatnią. Wtedy

$$2553^{3k} - 64 = (2553^k)^3 - 4^3 = (2553^k - 4) \cdot (2553^{2k} + 4 \cdot 2553^k + 16),$$

gdzie oba czynniki są większe od 1.

Ponieważ przypadki 1°–4° obejmują wszystkie liczby całkowite dodatnie, rozwiązanie jest zakończone.

### Uwagi

Następujące dane numeryczne wskazują, że najprawdopodobniej nie można uniknąć czterech przypadków rozpatrywanych przez nas w rozwiązaniu zadania.

I tak dla  $n = 49$  dana w zadaniu liczba jest równa  $19 \cdot P_{166}$ , gdzie drugi czynnik jest 166-cyfrową liczbą pierwszą. Trudno więc wyobrazić sobie rozwiązanie, które nie używa argumentu podzielności przez 19 jako powodu złożoności danej w zadaniu liczby.

Z kolei dla  $n = 35$  otrzymujemy liczbę  $109 \cdot P_{118}$ , gdzie 118-cyfrowy czynnik pierwszy odbiera nadzieję na uniknięcie w rozwiązaniu rozważania podzielności przez 109.

Wreszcie dla  $n = 51$  dana w zadaniu liczba nie ma dzielników pierwszych mniejszych od miliona, a dla  $n = 56$  najmniejszym dzielnikiem pierwszym jest 169489. Nie spodziewamy się więc rozwiązania nie wykorzystującego wzorów skróconego mnożenia.

**Zadanie 545.** Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej  $p$  dającej przy dzieleniu przez 8 resztę 1, istnieją takie liczby całkowite dodatnie  $a, b$ , że liczba  $a^4 + b^4$  jest podzielna przez  $p$  i mniejsza od  $2p^2$ .



*Rozwiązanie:*

Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą dającą przy dzieleniu przez 8 resztę 1. Wtedy istnieje taka liczba naturalna  $r$ , gdzie  $0 < r < p$ , że

$$r^4 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Wynika to z kongruencji

$$k^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$$

spełnionej dla każdej nierozkładalowej kwadratowej  $k$  modulo  $p$ , co pozwala wskazać  $r$  jako spełniającą kongruencję

$$r \equiv k^{(p-1)/8} \pmod{p}.$$

Niech  $N = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ . Wówczas  $N+1 > \sqrt{p}$ , czyli  $(N+1)^2 > p$ .

Dla  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$  oznaczmy przez  $R_n$  resztę z dzielenia iloczynu  $rn$  przez  $p$ . Liczby  $R_n$  są parami różne, gdyż z kongruencji

$$nr \equiv mr \pmod{p}$$

wynika podzielność liczby  $(n-m) \cdot r$  przez  $p$ , co wobec przyjętych założeń pociąga  $n = m$ .

Rozważmy  $N+2$ -elementowy zbiór  $\{R_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots, N\} \cup \{p\}$ . Zbiór ten zawiera liczby całkowite z zakresu od 0 do  $p < (N+1)^2$ , istnieją więc pewne jego dwa elementy różniące się o mniej niż  $N+1$ , czyli o nie więcej niż  $N$ .

Jeżeli elementami tymi są  $R_n$  i  $R_m$ , spełniające nierówność

$$R_n < R_m \leq R_n + N,$$

to przyjmując  $x = m - n$  oraz  $b = R_m - R_n$  otrzymujemy

$$|x| \leq N, \quad 0 < b \leq N \quad \text{oraz} \quad rx \equiv b \pmod{p}. \quad (\spadesuit)$$

W przypadku, gdy elementami tymi są  $p$  i  $R_n$ , zachodzi nierówność  $p - N \leq R_n$  i możemy przyjąć  $x = -n$  oraz  $b = p - R_n$ , z zachowaniem spełniania warunku  $(\spadesuit)$ .

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że liczby całkowite dodatnie  $a = |x|$  oraz  $b$  spełniają warunki zadania.

Wobec  $a \leq N$  oraz  $b \leq N$  otrzymujemy

$$a^4 + b^4 \leq 2N^4 < 2 \cdot (\sqrt{p})^4 = 2p^2.$$

Z kolei kongruencja

$$rx \equiv b \pmod{p}$$

pociąga

$$-a^4 \equiv b^4 \pmod{p},$$

czyli

$$a^4 + b^4 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wykazaliśmy więc istnienie liczb  $a, b$  o żądanych własnościach.

### Ciekawostka

Przy pomocy komputera można sprawdzić, że każda liczba pierwsza  $p < 73673$  dająca przy dzieleniu przez 8 resztę 1, ma wielokrotność postaci  $a^4 + b^4$  mniejszą od  $p^2$ .



---

Dla  $p = 73673$  najmniejsza taka wielokrotność to

$$73673 \cdot 74297 = 15^4 + 272^4.$$

Następna liczba pierwsza  $p$  bez wielokrotności postaci  $a^4 + b^4$  poniżej  $p^2$ , to  $p = 116329$ , gdzie najmniejszą wielokrotnością tego typu jest

$$116329 \cdot 117538 = 111^4 + 341^4.$$