Instytut Matematyczny Uniwersytet Wrocławski
TEST KWALIFIKACYJNY NA STUDIA DOKTORANCKIE
Wrocław, 30 maja 2014.

Zadanie 1. Niech $\boldsymbol{G}$ będzie grupą abelową w zapisie addytywnym z elementem neutralnym 0. Załóżmy, że w $\boldsymbol{G}$ zadana jest metryka ρ, która jest
a) niezmiennicza, tzn.

$$\rho(a+c, b+c) = \rho(a, b), \qquad a, b, c \in \boldsymbol{G},$$

b) niearchimedesowska, tzn.

$$\rho(a, b) \leq \max\{\rho(a, c), \rho(c, b)\}, \qquad a, b, c \in \boldsymbol{G}.$$

Udowodnij, że ciąg

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad a_k \in \boldsymbol{G},$$

jest ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy gdy $a_k \to 0$.

Zadanie 2. Wykaż, że
a) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$$

jest zbieżny;
b) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$$

jest rozbieżny;
c) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$$

jest zbieżny warunkowo.

Zadanie 3. Uzasadnij, że
a) właściwa domknięta podprzestrzeń przestrzeni Banacha jest zbiorem nigdziegęstym.

b) Czy przestrzeń Banacha może mieć – jako przestrzeń liniowa – bazę przeliczalną?

Zadanie 4. a) Pokazać, że dowolna przestrzeń metryzowalna jest T_4 (tzn. jest normalna).

W punktach b) i c) (poniżej) rozważmy przestrzeń $\mathbb{N}$ z topologią dyskretną.

b) W produkcie $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ zdefiniować metrykę wyznaczającą topologię produktową (zwaną topologią Tichonowa). Podać uzasadnienie.
c) Wykazać, że produkt $\prod_{r\in\mathbb{R}} \mathbb{N}$ nie jest przestrzenią metryzowalną.

Zadanie 5. W prostokątnej tabliczce $k \times n$ w każdym z pól brzegowych napisano liczbę rzeczywistą. Chcemy wpisać liczby rzeczywiste w pozostałe pola w sposób harmoniczny, tzn. tak, by liczba stojąca w każdym niebrzegowym polu była średnią arytmetyczną liczb z sąsiednich czterech pól.
a) Udowodnij, że każde wypełnienie harmoniczne osiąga maksimum w pewnym polu brzegowym.
b) Udowodnij, że istnieje co najwyżej jedno wypełnienie harmoniczne.
c) Udowodnij, że istnieje wypełnienie harmoniczne.

Zadanie 6. Niech X będzie zbiorem nieskończonym zaś $f\colon X \longrightarrow X$ pewną surjekcją. W X definiujemy relację równoważności $\sim$:

$$x \sim y \iff (\exists m, n \in \mathbb{N})(f^m(x) = f^n(y))$$

(przyjmujemy, że $f^0(x) = x$).
a) Wykazać, że jeśli wszystkie klasy abstrakcji relacji $\sim$ są skończone, to f jest bijekcją.
b) Niech A będzie klasą abstrakcji relacji $\sim$. W A definiujemy relację $\leq$:

$$x \leq y \iff (\exists n \in \mathbb{N})(f^n(x) = y).$$

Wykazać, że relacja $\leq$ jest częściowym porządkiem wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $x \in A$, zbiór $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ jest nieskończony lub gdy f ma punkt stały w A.

Zadanie 7. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $\dots$).
(a) Jaką liczbą kardynalną jest indeks podgrupy $\prod_{n\in\mathbb{N}} (p_n\mathbb{Z}, +)$ w grupie $\prod_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{Z}, +)$? Odpowiedź uzasadnić.

(b) W grupie ilorazowej $\prod_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{Z}, +) / \prod_{n\in\mathbb{N}} (p_n\mathbb{Z}, +)$ wskazać przykład podgrupy izomorficznej z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 8. Wynikami pewnego eksperymentu są pojawienia się liczb $1,\ 2$ lub 3 odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1,\ p_2$ i $p_3,\ p_1+p_2+p_3=1$. Wykonano n-niezależnych powtórzeń opisanego eksperymentu. Niech X_i oznacza liczbę pojawień się liczby $i,\ i=1,2,3,$ w tych n próbach.
a) Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(X_1=k|X_2=m)$.
b) Niech Y będzie liczbą pojawień się 1 w $n+m$ próbach, a X liczbą pojawień się 1 w n pierwszych próbach.
Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną $E(X|Y=k)$.

Zadanie 9. Niech $\{X_n, n\geq 1\}$ będzie ciągiem dodatnich, wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie o średniej $\mu=1$, wariancji σ^2 oraz skończonym momencie $EX_i^{5/2}<\infty$. Niech $\{c_{n^2,i}, 1\leq i\leq n^2, n\geq 1\}$ będzie tablicą liczb rzeczywistych takich, że $\sum_{j=1}^{n^2} c_{n^2,j}=1$.
Niech $\{N(n), n\geq 1\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych zdefiniowanych przez

$$N_1(n)=\max\{k:\sum_{j=1}^{k} X_j\leq n\},\quad N(n)=\max(N_1(n),1),\quad n\geq 1.$$

a) Pokazać, że $N(n)$ dąży z prawdopodobieństwem 1 do 1.
b) Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu zmiennych losowych $Y_n, n\geq 1$, zdefiniowanych poniżej (odpowiedź uzasadnić),

$$Y_n=\frac{\sum_{j=1}^{n^2} c_{n^2,j}X_j-1}{\sum_{j=1}^{N(n)} X_j},\quad n\geq 1.$$

Zadanie 10. Niech zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na $[0,\theta],\ \theta>0$.
a) Na podstawie jednoelementowej próby skonstruować test najmocniejszy na poziomie istotności α dla testowania hipotezy $H_0:\theta=\theta_0$, przeciwko hipotezie alternatywnej $H_1:\theta=\theta_1,\ 0<\theta_0<\theta_1$.
b) Rozwiązanie uzasadnić podając odpowiednie twierdzenie.
c) Podać moc tego testu.