Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
TEST KWALIFIKACYJNY NA STUDIA DOKTORANCKIE
Wrocław, 5 czerwca 2017.

Zadanie 1. Rozważamy elipsę $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Znaleźć najdłuższą cięciwę tej elipsy przechodzącą przez punkt $(0, -b)$.

(a) (3 pkt.) W przypadku gdy $a > \sqrt{2}b > 0$.

(b) (3 pkt.) W przypadku gdy $0 < a \leq \sqrt{2}b$.

Zadanie 2. Niech $h(N) = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}$ dla $N \in \mathbb{N}$.

(a) (2 pkt.) Oblicz granicę $\lim\limits_{N\to\infty} h(N)$.

(b) (2 pkt.) Udowodnij, że

$$\ln 2 - \frac{1}{2N} < h(N) < \ln 2.$$

(c) (2 pkt.) Wykaż, że $\frac{1}{n} < \ln(n + \frac{1}{2}) - \ln(n - \frac{1}{2})$ i wywnioskuj, że

$$h(N) < \ln\Big(2N + \frac{1}{2}\Big) - \ln\Big(N + \frac{1}{2}\Big).$$

Zadanie 3. Niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie.

(a) (3 pkt.) Udowodnij, że jeżeli $a < b$ i $\xi \in (g'(a), g'(b))$ to istnieje $x \in (a, b)$ takie, że $g'(x) = \xi$.

(b) (3 pkt.) Udowodnij, że jeżeli g jest jednostajnie ciągła, to $\liminf\limits_{x\to\infty} g'(x) < \infty$.

Zadanie 4. Niech f będzie funkcją ciągłą na $[0, \infty)$, posiadającą skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(a) (3 pkt.) Udowodnij, że dla każdego $\delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} t \int_\delta^\infty e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(b) (3 pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{t\to\infty} t \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 5. (6 pkt.) Rozstrzygnij, które z zagadnień początkowych dla równań różniczkowych zwyczajnych

(a) $x'(t) = x^{3/2}(t)$, $x(0) = 0$,

(b) $x'(t) = x^{3/2}(t)$, $x(0) = 2$,

(c) $x'(t) = x^{2/3}(t)$, $x(0) = 0$,

(d) $x'(t) = x^{2/3}(t)$, $x(0) = 1$,

ma rozwiązanie jedyne, a które ma rozwiązanie globalne (dla $t \in [0, \infty)$).

Zadanie 6. W każdym z podpunktów rozstrzygnij (z uzasadnieniem!), czy podane przestrzenie topologiczne X i Y są homeomorficzne.

(a) (1 pkt) $X = \mathbb{R}$ i $Y = [0, 1)$ z naturalną topologią na prostej rzeczywistej.

(b) (2 pkt.) $X = S^1 \times (S^1 \setminus \{(1, 0)\})$ i $Y = S^1 \times ([0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\})$, gdzie S^1 jest okręgiem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1 z naturalną topologią, topologia na $S^1 \times (S^1 \setminus \{(1, 0)\})$ jest dziedziczona z S^1, a topologia na $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ jest dziedziczona z odcinka $[0, 1]$.

(c) (3 pkt.) $X = \ell^\infty$ (tzn. zbiór ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych) z topologią zadaną przez normę supremum i $Y = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ z topologią produktową (obliczoną dla naturalnej topologii na $\mathbb{R}$).

Zadanie 7. Podgrupa H w grupie permutacji S_n jest *tranzytywna*, jeśli dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ istnieje permutacja $\sigma \in H$ taka, że $\sigma(i) = j$.

(a) (1 pkt) Uzasadnij, że tranzytywna podgrupa $H < S_n$ zawiera conajmniej n elementów i że jest to oszacowanie optymalne.

(b) (2 pkt.) Uzasadnij, że rząd dowolnej tranzytywnej podgrupy $H < S_n$ dzieli się przez n.

Podgrupa $H < S_n$ jest *2-tranzytywna*, jeśli dla dowolnych dwóch par (i, j), (k, l) liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ takich, że $i \neq j$, $k \neq l$, istnieje $\sigma \in H$ taka, że $\sigma(i) = k$ oraz $\sigma(j) = l$.

(c) (3 pkt.) Uzasadnij, że jeśli podgrupa $H < S_n$ jest 2-tranzytywna, zaś $N \triangleleft H$ jest nietrywialną podgrupą normalną w H, to N jest tranzytywną podgrupą w S_n.

Zadanie 8. Niech p będzie liczbą pierwszą, zaś F_p ciałem p-elementowym.

(a) (1 pkt) Wykaż, że k-wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem F_p ma p^k elementów.

(b) (3 pkt.) Oblicz, ile jest macierzy odwracalnych rozmiaru $n \times n$ o wyrazach w ciele F_p.

(c) (2 pkt.) *Flagą* w n-wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem F_p nazywamy ciąg podprzestrzeni

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset W_n$$

taki, że dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ wymiar W_i (nad F_p) wynosi i. Oblicz, ile jest flag w przestrzeni V.

Zadanie 9.

(a) (1 pkt) Podaj definicję filtru oraz ultrafiltru na danym zbiorze X.

(b) (2 pkt.) Na zbiorze $\beta\mathbb{N}$ wszystkich ultrafiltrów na zbiorze $\mathbb{N}$ rozważamy topologię, której bazę zbiorów otwartych stanowią zbiory postaci $\{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\}$, gdzie $A \subseteq \mathbb{N}$. Wskaż (z uzasadnieniem) przeliczalny podzbiór gęsty przestrzeni $\beta\mathbb{N}$.

(c) (3 pkt.) Niech X będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa, a D jej gęstym podzbiorem. Wykaż, że $|X| \leq 2^{2^{|D|}}$, gdzie $|X|$ oraz $|D|$ oznaczają odpowiednio moce zbiorów X oraz D.

Zadanie 10. Niech $U = (X_1, X_2)$ będzie dwuwymiarowym wektorem losowym. Oznaczmy $\theta = P(X_1 > X_2)$ i zdefiniujmy funkcję

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x_1 > x_2 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Następnie rozważmy ciąg niezależnych wektorów losowych $U_1, \ldots, U_n$ o tym samym rozkładzie co U.

(a) (3 pkt.) Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Q = \sum_{i=1}^{n} g(U_i)$.

(b) (3 pkt.) Niech $\theta = \frac{3}{4}$ i $n = 200$. Wyznacz przybliżone prawdopodobieństwo, że $Q \geq 160$.

Zadanie 11. (6 pkt.) Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną 1. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Z = X_1/X_2$ oraz rozkład warunkowy Z pod warunkiem $X_2 = x_2$.

Zadanie 12. Niech Y będzie p-wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie normalnym $Y \sim N_p(0, I)$. Niech A i B będą macierzami o wymiarach $k \times p$ takimi, że $AB^T = 0$.

(a) (2 pkt.) Udowodnij, że AY i BY są niezależne.

(b) (2 pkt.) Udowodnij, że formy kwadratowe $Y^T AY$ i $Y^T BY$ są niezależne.

(c) (2 pkt.) Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję formy kwadratowej $Y^T AY$.