Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 23 (23/2015)

Piątek, 4 września 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **220**, **221** i **223** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

220. Zapisz liczbę 625 używając trzykrotnie cyfry 5. Podaj trzy istotnie różne rozwiązania.

221. Zapisz liczbę 108 używając cyfr 3, 5 i 5.

222. Reklama pizzerii głosi: *Skomponuj własną pizzę na 1001 sposobów – wybierz dowolne cztery dodatki.* Ile dodatków jest dostępnych w tej pizzerii?

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

223. Zapisz liczbę 449 używając cyfr 1, 5 i 8 (każdej tylko raz).

Uzupełnianka pseudologarytmiczna I

224. Uzupełnij tabelkę wartości funkcji f takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:

1° W zakresie tabelki f jest niemalejąca, czyli $f(n) \leqslant f(n+1)$ dla $n=2, 3, 4, \ldots 25$.

2° Dla dowolnych liczb naturalnych m, n większych od 1 o iloczynie nie większym od 26 zachodzi równość $f(mn)=f(m)+f(n)$.

3° Przy zachowaniu warunków **1**° i **2**° suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	2	**7**		**12**		**17**		**22**	
3		**8**	6	**13**		**18**		**23**	
4	4	**9**		**14**		**19**		**24**	
5		**10**		**15**		**20**		**25**	
6		**11**		**16**	8	**21**		**26**	

Rozwiązania zadań 208–219

208. $59=\sqrt{(3!)!\cdot 5}-1$

209. $624=(3!)!-5!+4!$

210. *Odpowiedź:* $2^{2^{2^{2^4}}}=2^{2^{2^{4^2}}}$. Ciekawszy przykład to $\left(2^{2^{2^{2^2}}}\right)^{3^{3^{3^3}}}=\left(2^{3^{3^{3^3}}}\right)^{2^{2^{2^2}}}$.

211. Dla dowolnego dodatniego $a\neq 1$ obie liczby są równe $\frac{\log_a 3\cdot\log_a 7}{\log_a 2\cdot\log_a 5}$.

212. Po zlogarytmowaniu przy podstawie 3 obie liczby są równe $\log_3 2\cdot\log_3 5$.

213. Podane liczby są równe, mamy bowiem

$$\log_2 6\cdot\log_3 6=(1+\log_2 3)\cdot(1+\log_3 2)=1+\log_2 3+\log_3 2+\log_2 3\cdot\log_3 2=2+\log_2 3+\log_3 2$$

oraz $\log_2 6+\log_3 6=(1+\log_2 3)+(1+\log_3 2)=2+\log_2 3+\log_3 2$.

Inne rozumowanie: korzystamy z $\frac{1}{\log_2 6}+\frac{1}{\log_3 6}=1$ oraz $xy=x+y\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

214. Ponieważ $ab=1$, mamy $\log_a b=\log_b a=-1$.

215. *Odpowiedź:* $\left(\frac{8}{3}\right)^{8/3}>12$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{8}{3}\right)^{8}>2^6\cdot 3^3\,, \qquad 2^{24}>2^6\cdot 3^{11}\,, \qquad 2^{18}>3^{11}\,,$$

a to możemy otrzymać z wymnożenia stronami następujących dwóch nierówności:

$$\begin{array}{rcl} 256^2= & 2^{16}>3^{10} & =243^2\,, \\ 4= & 2^2>3 & =3\,. \end{array}$$

216. *Odpowiedź:* $\left(\frac{8}{3}\right)^{8/3}<16$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{8}{3}\right)^{8}<2^{12}\,, \qquad 2^{24}<2^{12}\cdot 3^{8}\,, \qquad 2^{12}<3^{8}\,, \qquad 2^3<3^2\,, \qquad 8<9\,.$$

217. *Odpowiedź:* $2^{2^{70}}<17^{17^{17}}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących równości:

$$16^{16^{17}}=\left(2^4\right)^{2^{68}}=2^{4\cdot 2^{68}}=2^{2^2\cdot 2^{68}}=2^{2^{70}}\,.$$

218. *Odpowiedź:* $2^{2^{27}}>243^{243^3}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących równości:

$$256^{256^3}=\left(2^8\right)^{2^{24}}=2^{8\cdot 2^{24}}=2^{2^3\cdot 2^{24}}=2^{2^{27}}\,.$$

219. *Odpowiedź:* $\sqrt{5}-\sqrt[3]{11}>1/100$.
Sposob I: Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, a następnie ze wzoru na różnicę sześcianów, otrzymujemy wzór na różnicę szóstych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^6-b^6}{(a+b)\cdot(a^4+a^2b^2+b^4)}\,,$$

gdzie należy założyć $a+b\neq 0$. Zastosowanie tego wzoru prowadzi do:

$$\sqrt{5}-\sqrt[3]{11}=\frac{125-121}{\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{11}\right)\cdot\left(25+5\cdot\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{121^2}\right)}>$$

$$>\frac{4}{\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{11}\right)\cdot\left(25+5\cdot\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{125^2}\right)}=\frac{4}{\left(\sqrt{\frac{20}{4}}+\sqrt[3]{\frac{88}{8}}\right)\cdot 75}>\frac{4}{\left(\sqrt{\frac{25}{4}}+\sqrt[3]{\frac{125}{8}}\right)\cdot 75}=$$

$$=\frac{4}{\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot 75}=\frac{4}{5\cdot 75}>\frac{4}{5\cdot 80}=\frac{4}{400}=\frac{1}{100}\,.$$

Sposob II: Nierówność udowodnioną w zadaniu **89** (**Trapez 11-12**) możemy przepisać w postaci

$$\frac{(a^n-b^n)\cdot a}{n\cdot a^n}<a-b<\frac{(a^n-b^n)\cdot b}{n\cdot b^n}\,, \qquad (1)$$

gdzie $a>b$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a $n>1$ jest liczbą naturalną.

Zastosowanie lewej nierówności (1) przy $n=6$ prowadzi do

$$\sqrt{5}-\sqrt[3]{11}>\frac{4\cdot\sqrt{5}}{6\cdot 125}>\frac{4\cdot 2}{750}=\frac{8}{750}>\frac{1}{100}\,.$$