Katowice, 12.05.2014 r.

Prof. dr hab. Jan Cholewa
Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski
Bankowa 14, 40-007 Katowice

tel./fax +48 32 2 582 976
e-mail: jan.cholewa@us.edu.pl
http://www.math.us.edu.pl/zrr/jcholewa/index.html

Ocena rozprawy doktorskiej mgr. Łukasza Paszkowskiego „Aproksymacja rozwiązań i oszacowania hiperkontraktywne dla modelu ewolucji dyslokacji"

Zainteresowania naukowe mgr. Łukasza Paszkowskiego koncentrują się wokół zagadnień dotyczących równań ewolucyjnych. W tę tematykę badawczą wpisuje się przedstawiona przez niego rozprawa doktorska *Aproksymacja rozwiązań i oszacowania hiperkontraktywne dla modelu ewolucji dyslokacji*.

Przedmiotem badań rozprawy są pewne modele matematyczne nawiązujące do zjawisk dyslokacji w kryształach.

Zasadnicza część rozprawy poświęcona jest analizie dwóch modeli ewolucyjnych:
(i) zagadnienia Cauchy'ego dla nielokalnego równania nieliniowego

$$u_t = |u_x|(-\sigma - \Lambda^\alpha u),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

z operatorem $\Lambda^\alpha = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \in (0,2)$, zadanym przy pomocy transformacji Fouriera jako

$$\widehat{(\Lambda^\alpha w)}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{w}(\xi)$$

oraz

(ii) układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{dX}{dt} = F(X),\ t > 0,$$

z warunkiem początkowym

$$X^0 \in \Omega \cap \ell^\infty,$$

gdzie

$$\Omega = \{X : |x_i - x_j| \leqslant \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}|i - j|\}.$$

Drugi z przytoczonych modeli rozważany jest z prawą stroną postaci $F(X) = (F_i(X))_{i\in\mathbb{Z}}$, $X = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, gdzie i-ta składowa

$$F_i(X) = \sum_{j\neq i} f(x_j - x_i, j - i)$$

określona jest przy pomocy funkcji dwóch zmiennych postaci

$$f(x,y) = \frac{x(y^2 - x^2)}{(y^2 + x^2)^2}.$$

W oparciu o twierdzenie Cauchy'ego-Lipchitza-Picarda pokazane jest istnienie jednoznacznych rozwiązań, które dla N-okresowych warunków początkowych

$$x_i^0 = x_{i+N}^0, \ i \in \mathbb{Z},$$

pozostają N-okresowe dla $t > 0$. Pokazana jest ponadto zbieżność takich rozwiązań do equilibrium; mianowicie

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = c,$$

gdzie

$$c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^0,$$

co znajduje także odzwierciedlenie w przedstawionych przez Autora wynikach obliczeń numerycznych.

Bardziej obszerną część rozprawy zajmuje analiza pierwszego z przedstawionych modeli. W rozważaniach egzystencjalnych, które dotyczą tu równania dla pochodnej przestrzennej $v = u_x$

$$v_t + \frac{\partial}{\partial x}\Big(|v|(\sigma - \nabla^{\alpha-1}v\Big) = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R},$$

z warunkiem początkowym

$$v_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

o zerowej średniej

$$\int_{\mathbb{R}} v_0 dx = 0,$$

wykorzystywane jest równanie zregularyzowane

$$v_t - \varepsilon v_{xx} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(|v|(\sigma - \nabla^{\alpha-1}v\Big) = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

W oparciu o zasadę odwzorowań zwężających Banacha konstruuje się rozwiązania lokalne tego równania spełniające formułę Duhamela

$$\begin{aligned} v(t) = G(\cdot,\varepsilon t) * v_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} G(\cdot,\varepsilon(t-s)) * \Big(|v(s)|\nabla^{\alpha-1}v(s)\Big)\, ds \\ - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} G(\cdot,\varepsilon(t-s))\,(\sigma|v(s)|)\, ds, \end{aligned}$$

gdzie G jest jądrem Gaussa-Weierstrassa,

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\big(-\frac{x^2}{4t}\big), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R},$$

a warunki początkowe obierane są w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ gdy $\alpha \in (0,1]$ lub w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}) \cap W^{\alpha-1,p}(\mathbb{R})$, $(\alpha-1)p > 1$, gdy $\alpha \in (1,2)$.

Dla stosownych warunków początkowych oszacowania aprioryczne pozwalają na uzyskanie rozwiązań określonych dla wszystkich $t \geqslant 0$. Z kolei zaadaptowanie kryterium zwartości Rakotosona-Temama umożliwia przejście do granicy gdy $\varepsilon \to 0^+$ i otrzymanie w ten sposób rozwiązania zagadnienia odpowiadającego granicznej wartości parametru $\varepsilon = 0$ tak, iż dla rozważanej klasy funkcji gładkich ϕ spełniona jest równość

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (-v\phi_t + |v|\nabla^{\alpha-1}v\phi_x - \sigma|v|\phi_x)dxdt - \int_{\mathbb{R}} v_0\phi(\cdot,0)dx = 0.$$

Uzyskane oszacowania rozwiązania są oszacowaniami typu $L^p(\mathbb{R}) - L^p(\mathbb{R})$ oraz $L^1(\mathbb{R}) - L^p(\mathbb{R})$ i wynikają z zastosowania naturalnej dla równań drugiego rzędu techniki Mosera-Alikakosa. W szczególności otrzymane jest ten sposób, iż

$$\|v(t)\|_p \leqslant C_{p,\alpha} t^{-\frac{1}{\alpha+1}(1-\frac{1}{p})} \|v_0\|_1^{\frac{p\alpha+1}{p(\alpha+1)}}, \ t > 0,$$

dla dowolnego $p \in [1, \infty]$.

W przypadku gdy $\alpha = 2$, to jest dla równania

$$u_t = |u_x|(u_{xx} - \sigma), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R},$$

pokazane jest następnie kryterium porównawcze dotyczące lepkościowych pod- i nadrozwiązań, które jest wykorzystane przy badaniu rozwiązań samopodobnych. Istnienie tego typu rozwiązań postaci

$$u(x,t) = \frac{1}{(t+1)^{1-\beta(\alpha+1)}}\Phi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(t+1)^\beta}$$

pokazane jest w przypadku $(\sigma, \beta) = (0, \frac{1}{4})$. Z kolei w przypadku $\sigma = -1$ uzyskane rozwiązanie prawie wszędzie postaci

$$u(x,t) = (T-t)^\alpha \Phi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{T-t},$$

nie jest rozwiązaniem lepkościowym.

Badania takich specjalnych rozwiązań dotyczą częściowo także sytuacji $\alpha \neq 2$, w której poszukiwanej postaci rozwiązanie samopodobne może nie istnieć, co pokazane jest w przypadku $(\sigma, \beta, \alpha) = (0, \frac{1}{2}, 1)$.

Wspomniane kryterium porównawcze wykorzystywane jest dalej przy badaniu własności zamierania rozwiązania, kiedy to nietrywialne rozwiązanie zanika w skończonym czasie tak, iż

$$u(T, \cdot) = 0.$$

Ta specyficznie nieliniowa własność, zauważona jeszcze przez A. S. Kalashnikowa, została pokazana dla $\alpha = 2$ w pewnej klasie warunków początkowych u_0, które leżą między rozpatrywanymi w chwili $t = 0$ pod- i nadrozwiązaniem rozważanego problemu. Czas zamierania rozwiązania został przy tym oszacowany także w obliczeniach numerycznych, przedstawionych dla przykładowego warunku początkowego

$$u_0(x) = -\frac{1}{10}(1-x^2)_+^2.$$

Badanie obydwu modeli ewolucyjnych jest dobrze umotywowane fizycznie i wymaga zaawansowanego aparatu analizy. Czyni to podejmowaną problematykę interesującą, a poparte erudycją Autora przekłada się na wysoki poziom naukowy rozprawy. Dodatkowym atutem jest przy tym umiejętność wykonywania przez Autora eksperymentów numerycznych, co znajduje swoje odzwierciedlenie w analizie każdego z modeli.

Rozważane zagadnienia cechuje znaczna skala trudności. Widoczne jest to w wielu fragmentach rozprawy. Jako przykład można tu wymienić oszacowania kontraktywne, w których tkwi pewna techniczna wirtuozeria. Z jednej strony wymagają one bowiem zręcznego powiązania szeregu nierówności; typu Nasha, Nirenberga-Gagliardo, Kato, Varopoulosa, a z drugiej subtelnego, rekurencyjnego łączenia uzyskiwanych oszacowań, które wspólnie przekładają się na uzyskany efekt hiper- i ultrakontraktywności nieliniowej półgrupy globalnych rozwiązań.

Spoglądając na skalę trudności badanych problemów uzyskanie w rozprawie ciekawych wyników świadczy o talencie oraz bardzo dobrym wykształceniu matematycznym Autora. Przekonuje też o jego zdolności do samodzielnego prowadzenia badań naukowych.

Jednoznacznie stwierdzam spełnienie wymogów ustawowych i wnioskuję o dopuszczenie mgr. Ł. Paszkowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Rozprawę mgr. Ł. Paszkowskiego uważam za wyróżniającą się poziomem naukowym.

Cholewa

Jan Cholewa