Wrocław, 18.08.2017

dr hab. Adam Nowak
Instytut Matematyczny
Polska Akademia Nauk

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Grzegorza Kępy

pod tytułem

Odwracalność operatorów flagowych na grupie Heisenberga

Operatory flagowe, czyli operatory splotu z tzw. jądrami flagowymi, są stosunkowo młodym konceptem matematycznym. Jest to zasadniczo pewne uogólnienie klasycznych już operatorów Calderóna-Zygmunda dopuszczające większe singularności. Operatory flagowe były rozważane po raz pierwszy w połowie lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku przez Müllera, Ricciego i Steina, w związku z badaniem mnożników typu Marcinkiewicza na grupie Heisenberga. W późniejszym czasie teoria operatorów flagowych była stopniowo odpowiednio formalizowana, rozwijana i rozszerzana do kontekstów coraz ogólniejszych grup aż do grup jednorodnych, pojawiły się też kolejne zastosowania. Swój wkład w rozwój tego kierunku badań wnieśli szeroko znani matematycy Nagel, Ricci, Stein i Wainger, a także Profesor Głowacki, promotor główny przedmiotowej rozprawy. Warto dodać, że uzyskane na tym polu rezultaty były publikowane w prestiżowych periodykach matematycznych, co pośrednio podkreśla ich istotę i wagę dla rozwoju analizy harmonicznej w ostatnim dwudziestoleciu.

W recenzowanej dysertacji doktorant podejmuje problem zamkniętości na odwracanie algebry operatorów splotowych generowanej przez jądra flagowe na grupie Heisenberga. Jest to naturalne, dobrze umotywowane i wysoce niebanalne pytanie. Analogiczne zagadnienia dla innych ważnych algebr splotowych, na grupach o różnej ogólności do jednorodnych włącznie, były rozważane z pozytywnym skutkiem m.in. przez Calderóna i Zygmunda, Christa oraz Christa i Gellera. Na szczególną uwagę zasługuje tu świeża praca prof. Głowackiego, w której autor wykazał zamkniętość na odwracanie algebr operatorów Calderóna-Zygmunda na grupach jednorodnych. Z drugiej strony, podstawowym nieprzemiennym przykładem grupy jednorodnej jest właśnie grupa Heisenberga. Analiza na tej grupie jest ważkim i dobrze rozwiniętym nurtem analizy, gdzie wiele aspektów czy obiektów jest bardziej jawnych i lepiej zrozumianych niż w przypadku ogólniejszych grup. Dlatego umiejscowienie problemu rozprawy w kontekście grupy Heisenberga wydaje się naturalnym i być może nawet niezbędnym krokiem pośrednim w kierunku pożądanego ostatecznego uogólnienia na grupy jednorodne.

Głównym wynikiem rozprawy jest twierdzenie mówiące, że algebra operatorów flagowych na grupie Heisenberga jest zamknięta na odwracanie, a mianowicie: jeżeli operator flagowy jest odwracalny w przestrzeni L^2 na grupie Heisenberga, to wówczas operator odwrotny też jest operatorem flagowym. Dowód tego rezultatu przedstawiony przez doktoranta jest skomplikowany, korzysta z rozmaitych zaawansowanych narzędzi i obiektów, m.in. z twierdzenia mnożnikowego Nagela-Ricciego-Steina, reprezentacji Schrödingera grupy Heisenberga, operatorów pseudoróżniczkowych Kohna-Nirenberga, rachunku symbolicznego Głowackiego, czy też twierdzenia Bealsa dotyczącego operatorów pseudoróżniczkowych. Dokładny opis drogi dowodu i pokonywanych trudności technicznych został bardzo dobrze przedstawiony w rozdziale rozprawy zatytułowanym *Opis wyników.*

Rezultat został opublikowany w renomowanym czasopiśmie z zakresu analizy harmonicznej *Journal of Fourier Analysis and Applications.* Jest to samodzielna praca doktoranta o objętości 21 stron. Rozprawę jako taką stanowi wspomniany artykuł obudowany dwoma rozdziałami o charakterze opisowym: wprowadzeniem i opisem wyników. Tutaj pojawia się natychmiast pewna wątpliwość, a mianowicie: czy to aby nie za mało jak na standardy rozprawy doktorskiej z nauk matematycznych? Mój początkowy sceptycyzm w tej kwestii został rozwiany podczas lektury dysertacji. W moim odczuciu gęstość substancji matematycznej, a także ciężar gatunkowy rozważań i kompresja pod kątem publikacji równoważą deficyt zwyczajowej objętości.

Dysertacja mgra Grzegorza Kępy ma charakter pracy badawczej zawierającej nowy i wartościowy wynik, który stanowi zauważalny wkład do nowoczesnej analizy harmonicznej, w szczególności do młodej teorii operatorów flagowych. Przypomnijmy, że ta ostatnia była rozwijana w dużej mierze przez szeroko znanych matematyków w znakomitych ośrodkach naukowych. Rozumowanie prowadzące do głównego rezultatu wymaga złożonych argumentów i zaawansowanych narzędzi. Znalezienie i przeprowadzenie całego dowodu świadczy niewątpliwie o dobrym opanowaniu przez doktoranta technik analitycznych związanych z grupą Heisenberga i zrozumieniu teorii operatorów flagowych. Redakcja i styl pracy są klarowne. Drobne usterki (misprinty) nie rzutują w istotny sposób na jakość rozprawy i nie mają żadnego wpływu na jej merytoryczną zawartość. Moja ocena pracy jest jednoznacznie pozytywna. Uważam, iż jest to przyzwoita rozprawa doktorska.

Podsumowując, stwierdzam, że recenzowana dysertacja spełnia wymagania ustawowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgra Grzegorza Kępy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.