Prof. dr hab. Jan Cholewa
Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych
Instytut Matematyki
ul. Bankowa 14
40-007 Katowice

tel. +48 32 359 20 82, +48 32 359 16 70
e-mail: jan.cholewa@us.edu.pl

Katowice, 12.12.2024 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Krzysztofa Krawczyka
„Concentration and stability of solutions to aggregation-diffusion equations"

Przedstawiona przez mgr. K. Krawczyka rozprawa doktorska „Koncentracja i stabilność rozwiązań równań agregacji-dyfuzji" dotyczy zagadnień równań różniczkowych cząstkowych i obejmuje analizę rozwiązań nieliniowych, nielokalnych równań ewolucyjnych, a w tym rozwiązań stacjonarnych takich równań.

Rozprawa podzielona jest na cztery rozdziały, z których pierwszy ma charakter ekspozycyjny w zakresie prowadzonych badań oraz wyników ujętych w tworzących zasadniczą część pracy rozdziałach drugim, trzecim i czwartym.

Rozdział drugi dotyczy zagadnienia początkowego

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t - \varepsilon\Delta u = \nabla\cdot(u\nabla W_k * u), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^d \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest współczynnikiem dyfuzji, a jądro splotu ma postać

$$W_k(x) = \frac{|x|^k}{k}, \quad x\in\mathbb{R}^d$$

z wykładnikiem

$$0<k<1.$$

Przyjmując, iż

$$u_0\in L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^p(\mathbb{R}^d), \quad \frac{2d}{2d+k-1}\leqslant p\leqslant\infty$$

oraz wykorzystując formułę Duhamela dla jednostkowego współczynnika dyfuzji

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta} \cdot (u(s)\nabla W_k * u(s))\, ds,$$

w oparciu o zastosowaną wersję twierdzenia Banacha o punkcie stałym pokazano istnienie jednoznacznego lokalnego rozwiązania

$$u \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)).$$

W dalszej części tego rozdziału badane były rozwiązania radialne, nieujemne. Wobec uzyskanego $L^p(\mathbb{R}^d)$-oszacowania oraz efektu zachowywania masy

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\, dx$$

przekładającego się na $L^1(\mathbb{R}^d)$-oszacowanie, przyjmując przy tym, iż $p \geqslant 2$, a dla $d = 1$ również $p \geqslant \frac{1}{k}$, pokazano globalne istnienie takich rozwiązań. Rozważając te rozwiązania przedstawiono następnie zjawisko akumulacji w otoczeniu zera. Mianowicie, gdy $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, a ponadto

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{2-k} u_0(x)\, dx < \infty$$

(który to warunek formułuje się też w rozprawie bardziej jeszcze subtelnie), udowodniono, iż przy pewnych $T, C, \nu > 0$ oraz wszystkich dostatecznie małych ε dla rozważanego rozwiązania zachodzi oszacowanie

$$\int_0^T \int_{B(\nu\varepsilon)^{\frac{1}{k}}} u(t,x)\, dx\, dt \geqslant C.$$

Gdy

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d, (1+|x|^2)dx) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d),$$

to dla rozważanego rozwiązania pokazano z kolei, iż

$$\|u(t)\|_p \not\to 0 \quad \text{gdy} \quad t \to \infty,$$

gdzie pośród technicznych kwestii pewną uwagę zwraca postać wykładnika β w Lemacie 2.30, która wydaje się być przedstawiona dla wymiaru $d = 1$, o co chciałbym zapytać podczas obrony.

Rozdział trzeci otwierają rozważania dotyczące równania, które jest ogólniejszą wersją występującego w badanym uprzednio zagadnieniu początkowym (1), mianowicie

(2) $$u_t - \varepsilon\Delta u^m = \nabla \cdot (u\nabla W_k * u), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

gdzie przyjmuje się, iż

$$m \geqslant 1, \qquad k > 0.$$

Poza przedstawioną na wstępie dla (2) własnością skalowania, zasadnicze rozważania tego rozdziału dotyczą rozwiązań stacjonarnych, z czym w szczególności wiąże się przeprowadzona dyskusja własności operatora

$$\mathcal{F}_1(\varphi) = \exp(-W_k * \varphi + D), \quad D \in \mathbb{R}.$$

Odrębna część tego rozdziału, w której zamieszczone są też efekty symulacji numerycznych, poświęcona jest uzyskaniu wzorów opisujących rozwiązania stacjonarne w wybranych przypadkach w których konkretnie obrano wartości d, m oraz k.

W rozdziale czwartym, wychodząc od zagadnienia początkowego dla paraboliczno-eliptycznego układu Kellera-Segela

$$u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, \quad -\Delta \psi + \psi = u, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

rozważa się zagadnienie początkowe postaci

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla K * u) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{3}$$

do którego przechodzi się wyrażając ψ jako

$$\psi = K * u,$$

gdzie K jest jądrem operatora odwrotnego do wyznaczonego przez obecne w wymienionym układzie równanie eliptyczne. Wyniki przedstawione dla zagadnienia (3) nawiązują do opublikowanej w 2021 roku w Journal of Evolution Equations współautorskiej pracy mgr. K. Krawczyka. Ujmują one w szczególności efekty stabilnościowe uzyskane dla stałych rozwiązań stacjonarnych $A \in [0,1)$ przy $L^p(\mathbb{R}^d)$-zaburzeniach, jak również przeprowadzoną w obecności takich zaburzeń analizę niestabilnego przypadku $A > 1$, gdzie wykorzystywane są między innymi zaprezentowane w tym rozdziale własności półgrupy rozwiązań zagadnienia zlinearyzowanego

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + A \Delta K * v = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Warto zwrócić uwagę, iż możliwość efektywnego rozważania w obecności $L^p(\mathbb{R}^d)$-zaburzeń stałych rozwiązań stacjonarnych (3) związana jest z wykorzystaniem oprócz standardowych przestrzeni Lebesgue'a także przestrzeni lokalnie jednostajnych. Dla dowolnie obranego $1 \leqslant p < \infty$ taka przestrzeń określona jest jako ogół $\phi \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, dla których

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^d} \|\phi\|_{L^p(\{|x - x_0| < 1\})} < \infty.$$

Elementami określonej w ten sposób przestrzeni są zarówno stałe equilibria, jak również elementy $L^p(\mathbb{R}^d)$, a rozważając formułę Duhamela otrzymuje się dla (3) przy zadanym w tej przestrzeni warunku początkowym twierdzenie o istnieniu jedynego rozwiązania.

Tematyka rozprawy jest w całości interesująca naukowo. Badane zagadnienia nawiązują do uznanych modeli zjawisk występujących w zastosowaniach, mających przy tym duży oddźwięk w literaturze. Obszerna lista referencji pokazuje zarówno głębokie zakotwiczenie tematyki w literaturze, jak i jej rozległą znajomość przez mgr. K. Krawczyka, co w przekonujący sposób zaprezentowane zostało w rozprawie.

Oprócz ogólnej wiedzy matematycznej na uznanie zasługuje zaawansowane przygotowanie specjalistyczne mgr. K. Krawczyka w zakresie równań różniczkowych cząstkowych. Widoczne jest to w szeregu oszacowań, których otrzymanie było wymagające zarówno w bezpośrednim odniesieniu do rozwiązań badanych zagadnień nieliniowych, jak i w zakresie dotyczącym półgrup operatorów liniowych, których oszacowania w istotny sposób były wykorzystywane do uzyskania przedstawionych w rozprawie wyników.

Merytoryczny poziom rozprawy jest naprawdę dobry. W świetle przedstawionej rozprawy widoczny jest w szczególności talent matematyczny mgr. K. Krawczyka do prowadzenia pracy naukowej.

Wartościowa jest ponadto podejmowana przez mgr. K. Krawczyka współpraca naukowa. Za bardzo ciekawą uważam jego współautorską publikację *Stability of constant steady states of a chemotaxis model*, subtelnie wykorzystującą własności lokalnie jednostajnych przestrzeni funkcyjnych.

Przechodząc do konkluzji stwierdzam, iż spełnione zostały wymogi ustawowe i wnioskuję o dopuszczenie mgr. K. Krawczyka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Cholewa

Jan Cholewa