Wrocław, 8 IX 2018 r.

prof. dr hab. Krzysztof Bogdan
Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej
krzysztof.bogdan@pwr.edu.pl

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Miłosza Krupskiego
"Niekonwencjonalne, nieliniowe, nielokalne równania różniczkowe cząstkowe typu ewolucyjnego: studium dwóch przypadków"

Rozprawa doktorska mgr. Miłosza Krupskiego, napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Grzegorza Karcha, liczy ponad 80 stron, które zorganizowane są w 3 rozdziały i bibliografię. Rozprawa rozwija teorię ewolucyjnych równań różniczkowych cząstkowych. Poniżej omawiam zawartość rozprawy, interesujące punkty i dostrzeżone (drobne) usterki.

Krótki Rozdział 1 rozprawy ma charakter wstępny: w klarowny sposób prezentuje tematykę rozprawy, a także podstawowe informacje na temat ułamkowego laplasjanu $(-\Delta)^s$ oraz pól losowych i równań cząstkowych będących w polu zainteresowań autora.

Rozdział 2 rozprawy poświęcony jest teorii lepkiego równania Burgersa

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^s u = \nabla_z f(u) & \text{na } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ u(0) = u_0 & \text{na } \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

z nieliniowością f i warunkiem początkowym u_0, który jest niezmienniczym (pod względem rozkładu) na izometrie polem losowym $u_0 = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} Z(d\xi)$ o skończonej mierze spektralnej σ. Tutaj $\nabla_z g = \frac{z}{|z|}\cdot\nabla g$. Wyniki tego rozdziału pochodzą z preprintu (numeracja wg. rozprawy):

[73] M. Krupski, Convection-Diffusion Equations with Random Initial Conditions, arXiv (2017).

W Rozdziale 2 Autor wykorzystuje własności półgrupy ułamkowego laplasjanu i jej gradientu oraz własności całek względem ortogonalnych miar losowych Z jw. Pola niezmiennicze są w pewnym sensie stałe, co ułatwia ich asymptotyczną analizę i wprowadza kasowania w wyrażeniach całkowych pod znakiem wartości oczekiwanej. Nieoczekiwanym utrudnieniem jest fakt, że takie pola nie tworzą przestrzeni liniowej. Autor zapobiegliwie tłumaczy ich własności i w porę przygotowuje formalizm, który np. pozwala je różniczkować. Staranne i stopniowe przygotowywanie materiału oraz bardzo dobre przygotowanie techniczne dyskusji jest charakterystyczną cechą rozprawy. Działanie półgrupy P_t ułamkowego laplasjanu na pole losowe dane jest przez całkowanie wg. ortogonalnej miary losowej Z. Rodzi się pytanie, czy splot u_0 i P_t jest bezwzględnie zbieżny dla p.w. realizacji pola, co ułatwiłoby konstrukcję i analizę rozwiązań równania. Nieco brakuje mi pogłębionej dyskusji punktowych własności ciągłości rozważanych całek i rozwiązań w czasie i przestrzeni oraz zastanawia ograniczenie do L^p-całkowalności dla $p \geqslant 2$. Zaskakująco późno pojawia się gęstość półgrupy, $p_t(x)$–dopiero na str. 20–i tamże niepokoi niejasne odniesienie do tw. Fubiniego.

Na stronie 21 pojawia się założenie, że realizacje pola są ograniczone. Wtedy własności punktowe są łatwiej dostępne, jednak to założenie jest mocno ograniczające, bo wyklucza np. nietrywialne pola gaussowskie.

W Rozdziale 2.5.1 opisana jest procedura iteracyjna Picarda konstrukcji rozwiązań, która, wraz normami Bieleckiego i odpowiednią procedurą aproksymacji, jest w zasadzie stosowana w całej pracy. Bardzo interesujące są opisy ewolucji p-momentów rozwiązań w Rozdziale 2.5.2. W dodatku do Rozdziału 2 opisane są własności miar losowych. Myślę, ze w iloczynach skalarnych tu i i innych miejscach rozprawy Autor powinien pisać sprzężenie zespolone na drugim czynniku.

W Rozdziale 3 Autor opisuje ogólny schemat badania nieliniowych deterministycznych ewolucji z generatorami rzędu różniczkowego mniejszego niż 1:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}_u u = 0 & \text{na } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0) = u_0 & \text{na } \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{L}_v w(x) = \int_{\mathbb{R}^d} [u(x) - u(y)] \rho(v(x), v(y); x, y) dy$ jest jądrem typu Lévy'ego o intensywności zależnej od rozwiązania. Warunek początkowy u_0 jest tutaj deterministyczny. Klasa dopuszczalnych jąder ograniczona jest pewnym warunkami izotropowości, monotoniczności i całkowalności. Warunki te dopuszczają jednak bardzo interesujące operatory nielokalne i nieliniowe, m.in. operatory, które są wymienione w Rozdziale 3.5. Zapewne rozszerzenia tych warunków będą przedmiotem dalszych badań. Warunki te pozwalają otrzymywać np. zasadę zachowania całki rozwiązania i zmniejszanie się rozwiązań w normach L^p. Ponownie zwraca uwagę świetne przygotowanie i prezentacja materiału, który jest starannie dobrany do badanych zagadnień i zaawansowany (np. wykorzystanie funkcji o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}^d$ oraz analiza rozwiązań entropijnych). W dowodzie interesującego Twierdzenia 3.2.7 (odpowiednik nierówności Kato) na dole str. 50 niektóre nierówności powinny być chyba nieostre. Na str. 55 pojawia się przedwcześnie symbol $\rho^{\epsilon,R}$. W Rozdziale 3.4 zastanawia, czy rozwiązania spełniają wzór Duhamela, jak na str. 53. Na str. 62 "compact sets with disjoint interior" powinny mieć też brzeg zerowej objętości (albo można pisać o kostkach).

Rozprawa doktorska mgr. Miłosza Krupskiego twórczo rozwija badania z zakresu równań różniczkowych cząstkowych. Merytoryczną i pojęciową zawartość rozprawy oceniam bardzo wysoko, przede wszystkim ze względu na możliwe dalsze szerokie wykorzystanie i rozwijanie. Wydaje się, że Rozdział 3 będzie przedmiotem zainteresowania licznych badaczy nielokalnych nieliniowych równań różniczkowych. Do dalszych badań pozostają też istotne wyzwania techniczne, np. obecne ograniczenie wykładnika osobliwości jądra całkowego operatora $\mathcal{L}$ w Rozdziale 3. Należy wysoko ocenić znajomość literatury przedmiotu. Prezentacja wyników jest znakomita, ze zrozumieniem procesu komunikacji między czytelnikiem a piszącym. Rozprawa napisana jest też bardzo dobrze pod względem językowym i stylistycznym, wręcz ze swadą, i czyta się ją z przyjemnością.

Przedłożona rozprawa doktorska bez wątpienia spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z zakresu matematyki. Wnoszę o dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z wyrazami szacunku,

Krzysztof Bogdan