dr hab. Marek Męczarski, prof. SGH
Instytut Ekonometrii
Szkoła Główna Handlowa
Al. Niepodległości 162
02-554 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Kamila Dyby
Zastosowanie wielowymiarowych funkcji kwantylowych
do badania wielowymiarowych porządków stochastycznych

Recenzja została przygotowana na mocy uchwały Rady Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego z 19 lutego 2019 roku.

1. Uwagi wstępne.

Rozprawa liczy 148 stron. Składa się ze wstępu, sześciu rozdziałów, bibliografii (41 pozycji) i spisu treści. Dziedziną pracy są nauki matematyczne, dyscypliną – matematyka. Dokładniej określona problematyka to stosowana teoria prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Rozważa się porządki stochastyczne związane z pewnymi aspektami przekształceń i struktury dystrybuant wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa.

2. Zawartość i osiągnięcia pracy.

We *Wstępie* scharakteryzowano tematykę i treść pracy, zwracając uwagę na znaczenie funkcji kwantylowych (odwrotności dystrybuanty), dla definiowania i analizowania porządków stochastycznych, przy czym w przypadku wielowymiarowym pojęcie funkcji kwantylowej staje się nadzwyczaj złożone i niejednoznaczne. W rozdziale 1 pt. *Kwantyle i porządki stochastyczne w jednym i w wielu wymiarach* przedstawiono zgodnie z literaturą opis problematyki i podstawowe definicje dotyczące funkcji kwantylowych i porządków stochastycznych oraz wprowadzenie do porządków wielowymiarowych oraz kwantyli rozkładów wielowymiarowych w ujęciu Einmahla i Masona (1992). Rozdział 2 *Własności wielowymiarowych funkcji kwantylowych* traktuje o monotoniczności, ciągłości i zbieżności wielowymiarowych funkcji kwantylowych oraz o rozkładach zniekształconych (ang. *distorted*). W rozdziale 3 *Wielowymiarowe funkcje kwantylowe a porządki stochastyczne* przedstawiono zasadnicze wyniki wiążące wielowymiarowe funkcje kwantylowe z wielowymiarowymi porządkami stochastycznymi. Rozważano porządki: (zwykły) stochastyczny, ortantowe – dolny i górny, słaby hazardowy i słaby odwrotny hazardowy oraz porządek ilorazowy (ilorazu wiarogodności). Podano szereg warunków na to, aby własności funkcji kwantylowych implikowały rozpatrywane porządki lub były im równoważne. Rozdział 4 *Uporządkowanie rozkładów zadanych przez archimedesowe funkcje łącznikowe* rozwija elementy teorii funkcji łącznikowych (ang. *copula functions*), będących najbardziej kompletnym opisem zależności zmiennych losowych jako składowych wielowymiarowych wektorów losowych. Zadanie porównywanych wielowymiarowych rozkładów za pomocą takich funkcji (przy założeniu, że są to tzw. archimedesowe funkcje łącznikowe) stwarza problem wyznaczenia

Ceyfle

na tej podstawie funkcji kwantylowych i scharakteryzowania porządków stochastycznych (w tym przypadku ortantowych). W rozdziale 5 *Porządkowanie dwóch par rozkładów i metryki niezmiennicze względem wielowymiarowych porządków stochastycznych* wychodzi się od wyników Lehmanna i Rojo (1992) dotyczących wprowadzenia porównania wzajemnego oddalenia od siebie par uporządkowanych stochastycznie rozkładów (z wykorzystaniem pojęcia niezmienniczości względem operacji składania dystrybuant i funkcji kwantylowych) oraz wprowadzenia metryk na przestrzeni rozkładów związanych z odpowiednimi porządkami stochastycznymi. Wyniki te zostają uogólnione na przypadek rozkładów wielowymiarowych. Rozdział 6 *Empiryczne wielowymiarowe funkcje kwantylowe* przedstawia dość złożoną konstrukcję tych funkcji, analogiczną do konstrukcji dystrybuanty empirycznej, oraz twierdzenia o zbieżności.

3. Komentarze i uwagi

Rozprawa jest, jak na nauki matematyczne, bardzo obszerna, za to dość kompletna, jeżeli chodzi o charakter wyników. Jest dobrze zredagowana i napisana dobrym, rzeczowym i fachowym językiem. Staranność redakcji zmienia się: pierwszych 20 stron zredagowano perfekcyjnie, potem coraz częściej czytelnik napotyka usterki interpunkcyjne (braki przecinków nieraz utrudniają czytanie) i czasem błędy we wzorach (szczęśliwie łatwe do wychwycenia i poprawienia). Nie psują one ogólnego wrażenia. Rzucającym się w oczy niedostatkiem redakcyjnym jest jedynie brak zakończenia lub podsumowania, w którym autor mógłby powiedzieć, co w swojej pracy uważa za najciekawsze i najważniejsze, co jeszcze można lub warto zrobić, czy i co jeszcze można uogólnić lub pogłębić. Zbyt niejasno potraktowano kwestię, które wyniki są oryginalne i należą do autora pracy, chociaż są na ten temat sugestie we *Wstępie*. Zaskakuje, że według bibliografii rozprawy i załączonej dokumentacji żadne wyniki autora nie zostały dotąd opublikowane ani przyjęte do druku.

Przedstawione w rozprawie wyniki są interesujące i wartościowe dla badań nad porządkami stochastycznymi oraz ich wykorzystaniem tam, gdzie porównuje się w ujęciu wielowymiarowym czasy życia, poziom ryzyka i tym podobne wielkości. Problematyka pracy ma tę cechę, że rozpatruje się i uogólnia wiele porządków stochastycznych, które wiążą się ze sobą, poprzez grupowanie porządków generowanych w sposób analogiczny w odpowiednim sensie oraz zintegrowane w miarę możliwości dowodzenie ich własności. Dowodzenie twierdzeń w rozprawie to głównie dowodzenie własności wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa określonych w złożony sposób. Odbywa się ono przy użyciu względnie nietrudnych środków matematycznych (rachunek różniczkowy i całkowy, klasyczne nierówności i oszacowania teorii prawdopodobieństwa), bywa jednak dość skomplikowane, pomysłowe, zawsze jest jasne, czasem przechodzi w schemat, co pozwala skracać niektóre partie pracy. Reasumując, rozprawa jest cennym wkładem do teorii wielowymiarowych porządków stochastycznych. Z ogólniejszych pytań warto byłoby odpowiedzieć, w związku z problematyką rozdziału 4, jak istotne jest założenie o „archimedesowskości" funkcji łącznikowych, a w związku z rozdziałem 6, na pytanie o wielowymiarowe uporządkowania stochastyczne w ujęciu empirycznym (na podstawie próby statystycznej)– o ich definiowanie (badanie) na podstawie empirycznych funkcji kwantylowych i o własności graniczne.

W recenzowanej pracy znalazło się trochę miejsc budzących różnorakie wątpliwości, wymienianych w kolejności pojawiania się w tekście. Od str. 5: funkcje nazwane przez autora łącznikowymi, ang. *copula (functions)* otrzymują w rozmaitych polskojęzycznych opracowaniach inne nazwy: „funkcje łączące", „kopule" (co się zgadza z terminem językoznawczym, inaczej „łącznik"), „kopuły" (co jest błędnym tłumaczeniem nazwy angielskiej). Recenzent zdecydował się respektować wybór autora pracy. Str. 7: zmienne losowe należałoby definiować na jakiejś przestrzeni probabilistycznej; na usprawiedliwienie autora, służyłoby to wyłącznie formalnej ścisłości definicji. Na str. 84 zamiast $\log \circ f(x)$ naturalniej jest napisać $\log f(x)$; w ogóle w pracy pisownia złożeń funkcji powinna być przemyślana i być może objaśniona na początku, gdyż złożenia dystrybuant i funkcji kwantylowych są na ogół (nie zawsze) zapisywane bez znaków superpozycji funkcji. Na str. 86 w tezie wniosku 3.6 – wzór (3.8) określa dystrybuanty, a nie gęstości. Str. 87_3 – funkcja postaci (3.8) czy (3.10)? Na str. 95 w przykładzie 4.4 pojawia się $X' \leq_{uo} Y'$, ale bezpośrednio przez przykładem była mowa wyłącznie o porządku dolnym ortantowym. Na str. 100 w konkluzji na dole strony warto powołać się na lemat 4.1. Str. 129 – ściśle mówiąc, dystrybuanta jest funkcją niemalejącą. Na str. 133 przed twierdzeniem 6.3 nie jest jasne, że „oba twierdzenia" przytaczane za [32] (Serfling, 1980) to 6.3 (i) i (ii), a nie twierdzenia 6.3 i 6.4; w twierdzeniu 6.3 (i) dla $d = 1$ stała C już nie zależy od d i nie wiadomo, czym jest η. Na str. 136, w dowodzie lematu 6.4, wiersz 11g. oraz str. 137, w dowodzie lematu 6.5, wiersz 12d.: chyba raczej nie piszemy w stylu $A, B \leq C$, tylko $A \leq C, B \leq C$. Str. 138_6: dla $d \geq 2$.

We wzorach jest trochę błędów maszynowych. W przykładzie 1.1 na str. 39, we wzorach na $F(x)$ i $\bar{F}(x)$ w ostatnim członie wzoru powinno być $x \geq \frac{1}{2} \wedge y \geq \frac{1}{2}$, a we wzorach na $G(x)$ i $\bar{G}(x)$ w ostatnim członie wzoru powinno być $x \geq 1 \wedge y \geq 1$. Na str. 42^8 we wzorze na $G \circ F_{-1}^{\varphi}(t)$ powinno być „$\leq t$". Na str. 81 we wniosku 3.5 (iii) zabrakło założenia o funkcji $\bar{F}$. Na str. 136, w dowodzie lematu 6.4, wiersz 9g., wypadł przecinek z oznaczenia przedziału $[\mu_n(t), \nu_n(t)]$. Na str. 139_5 powinno być $F_n^{-1}(t) = X_{(i)}$.

Ze wspomnianych usterek redakcyjnych wypada wspomnieć niektóre. Na str. 24 w lemacie 1.4 w punkcie (i) zbędny jest znak równości po $G \circ F_{-1}(t)$, a w punkcie (ii) – $\varphi(t)$ między $G \circ F^{-1}(t)$ a $G \circ F_{-1}(t)$. Na str. 26_2; zgodnie. Na str. 56 w dowodzie twierdzenia 2.18 zdanie "Weźmy (...), to widzimy, że $F(x) = 1$." jest zbyt niedbale sformułowane; może to przeoczenie. Na str. 64 sporo razy "prawostronne", "lewostronne", zamiast "prawostronnie", "lewostronnie". Na str. 80 w tekście twierdzenia 3.1 należało chyba zapanować nad rozstrzeleniem znaków, na str. 81 w punktach (iii) i (iv) tego twierdzenia pojawia się samotny znak w nowej linii. Na str. 97 w przykładzie 4.7 określana tam funkcja łącznikowa Alego-Mikhaila-Haqa jest już wprowadzona w przykładzie 4.6. Na str. 104 wiersz 6g. i 5d. – raczej nie zaczyna się zdania od symbolu, ale dla polepszenia stylu dodaje się jakieś odpowiednie słowo początkowe. Na str. 115 przed twierdzeniem 5.13 autor wspomina twierdzenie 3.13 i wniosek 3.8, a samo twierdzenie 5.13 następuje poniekąd niespodziewanie, bez żadnego wprowadzenia. Str. 123: „nie gorszy" – osobno. Str. 125_{11} – przykład 4.10, nie 10, ponieważ to sugeruje bieżący rozdział 5 i przykład 5.10, którego nie ma. Str. 130: „nie większej" – osobno. W *Bibliografii* – tytuły książek po angielsku piszemy wielkimi literami. Dla pozycji [14] nie ma danych bibliograficznych – czy to jest nieopublikowane opracowanie?

Pewna liczba błędów maszynowych została pominięta.

Wszystkie te uwagi i usterki mają ograniczone znaczenie, chociaż niektóre będą musiały być uwzględnione przy ewentualnej publikacji wyników.

4. Konkluzja. Mgr Kamil Dyba wykazał się zdolnością rozwiązywania zaawansowanych problemów w dziedzinie matematyki oraz napisania i zredagowania obszernego opracowania naukowego na wysokim poziomie. Recenzowana praca jak najbardziej spełnia ustawowe warunki stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę więc o przyjęcie rozprawy doktorskiej mgr. Kamila Dyby i o dopuszczenie do publicznej obrony tej pracy. Z racji całościowego potraktowania problematyki związku wielowymiarowych funkcji kwantylowych i wielowymiarowych porządków stochastycznych, przejrzystości rozprawy i dobrego poziomu wyników stawiam wniosek o wyróżnienie pracy.

Warszawa, 30.IV.2019

Marek Męczarski

Marek Męczarski