



UNIwersytet
Warszawski



Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Prof. dr hab. Paweł Strzelecki, Instytut Matematyki

Warszawa, 19 maja 2021 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Agnieszki Hejny

Rozprawa doktorska Agnieszki Hejny, napisana w języku angielskim i zatytułowana *Harmonic analysis and Hardy spaces in the rational Dunkl setting* (polski tytuł: *Analiza harmoniczna i przestrzenie Hardy'ego w kontekście dunklowskim*) oparta jest na serii wyników, uzyskanych przez autorkę w aż dziewięciu artykułach i preprintach cytowanych w rozprawie. Współautorem sześciu z nich jest promotor, Jacek Dziubański (w jednym przypadku także wspólnie z J.-P. Ankerem). Z obszernego, kilkustronicowego oświadczenia Jacka Dziubańskiego o współautorstwie wynika, że jego współpraca z Agnieszką Hejną trwa od 2015 roku i ma, w mojej ocenie, bardzo naturalny, wręcz modelowy charakter współpracy promotora z doktorantem / doktorantką: często jest tak, że promotor mówi, co zapewne można udowodnić i jakie poszlaki lub argumenty o tym świadczą, a doktorant wspólnie z nim lub samodzielnie wkłada ogrom pracy w sprawdzenie, że przewidywania lub hipotezy promotora dają się zamienić w ścisłe dowody. Te prace, które zgodnie z bibliografią rozprawy już są opublikowane, ukazały się w bardzo dobrych i dobrych czasopismach: *J. Fourier Anal. Appl.*, *J. Funct. Anal.*, *Math. Nachrichten*, *Studia Math.* W chwili, gdy piszę tę recenzję, opublikowana w *J. Fourier Anal. Appl.* jest także samodzielna praca autorki, wymieniona w bibliografii rozprawy jako [70].

Sama rozprawa liczy sobie viii + 205 ponumerowanych stron. Ma 14 rozdziałów, podzielonych między cztery części, oraz bibliografię złożoną ze 133 pozycji. Jest to solidna, średniej objętości monografia.

Nawet w świetle samych powyższych informacji, a tym bardziej po lekturze, nie mam najmniejszych wątpliwości, że rozprawa przedstawiona przez Agnieszkę Hejnę spełnia z dużą nawiązką komplet formalnych wymagań z art. 186–187 Ustawy Prawo o Szkolnictwie Wyższym i Nauce z 20 lipca 2018 r.

* * *

Przejdę teraz do zwięzłego omówienia zawartości rozprawy. Operatory Dunkla, badane od nieco ponad 30 lat, są zdefiniowane jako zaburzenia pochodnych kierunkowych przez operatory różnicowe, związane z systemami pierwiastków i dyskretnymi grupami odbić, patrz (2.14) w rozprawie. Związana z nimi teoria Dunkla jest uogólnieniem analizy fourierowskiej i harmoniczej, motywowanym m.in. przez analizę na grupach Liego i przestrzeniach symetrycznych.

W pierwszej części rozprawy, autorka bada oszacowania translacji Dunkla różnych funkcji. Pojawiają się oszacowania jądra $h_t(x, y)$ półgrupy generowanej przez laplasjan Dunkla $\Delta_k = \sum T_j^2$, gdzie T_j^2 są dunklowskimi odpowiednikami zwykłych pochodnych cząstkowych ∂_{x_j} , a także oszacowania dunklowskich translacji funkcji o zwartych nośnikach, konieczne w dalszych częściach rozprawy.

Drużga część rozprawy, najdłuższa, obejmująca rozdziały 5–9 i około 70 stron tekstu, stanowi w istocie pełny i gruntowny wykład odpowiedników zasadniczych rozdziałów klasycznej analizy harmoniczej w \mathbb{R}^n , tylko w ogólniejszym i trudniejszym technicznie ujęciu dunklowskim. Pojawiają się więc:

- Oszacowania dla funkcji maksymalnej: słabego typu $(1, 1)$ i w przestrzeniach $L^p(dw)$, gdzie dw oznacza naturalną miarę (z wielomianową gęstością) wyznaczoną przez dany system pierwiastków;
- Odpowiednik klasycznego twierdzenia mnożnikowego Hörmandera (patrz Twierdzenie 6.4);
- Oszacowania słabego typu i w $L^p(dw)$ dla operatorów całkowych singularnych typu splotowego (patrz rozdział 7), z dowodami prowadzonymi według schematu znanego z klasycznej sytuacji euklidesowej;
- Oszacowania funkcji kwadratowych typu Littlewooda–Paley z góry i z dołu (twierdzenia 8.5 i 8.8);
- Wreszcie, oszacowania jąder całkowych dla półgrup generowanych przez laplasjan Dunkla i ogólniej, sumy parzystych potęg operatorów Dunkla T_j .

Całość tej części to prezentacja wyników wspólnych z promotorem, zawartych w pracach [44]–[48].

Trzecia część rozprawy, rozdziały 10 i 11, to teoria przestrzeni typu Hardy'ego zdefiniowanych w sytuacji dunklowskiej; dowodzone są odpowiedniki znanych w klasycznej sytuacji dwóch charakterystycznych rzeczywiście przestrzeni Hardy'ego — przez całkowalność odpowiedniej funkcji maksymalnej i przez rozkład atomowy; autorka rozważa też odpowiedniki lokalnych przestrzeni Hardy'ego h^p , wprowadzonych przez Goldberga.

Ostatnia, czwarta część rozprawy to badanie operatorów Dunkla–Schrödingera (laplasjan Dunkla plus mnożenie przez potencjał), dla potencjałów spełniających rodzinę tzw. odwrotnych nierówności Höldera z odpowiednio dużym wykładni-

kiem, a także przestrzeni typu Hardy'ego definiowanych przez takie operatory. W jakiejś mierze ta część rozprawy stanowi kontynuację i uogólnienie wcześniejszych prac Dziubańskiego i Zienkiewicza. Ta część rozprawy oparta jest o indywidualne prace autorki [70] i [71], wymienione w bibliografii jako preprinty z lat 2019–2020; jak napisałem wcześniej, jedna z nich jest już opublikowana w *J. Fourier Anal. Appl.*.

W moim odczuciu sam materiał części czwartej byłby w pełni wystarczający na doktorat.

* * *

Widać z powyższego omówienia, że jest to (raczej) rozprawa, gdzie w istotnie nowej sytuacji buduje się rozległy odpowiednik znanej, klasycznej, trudnej teorii, a nie rozwiązuje mniej czy bardziej znany problem. Chcę podkreślić, że nie chodzi tu w żadnym razie o proste uogólnienia: cała rozprawa stanowi bardzo mocne świadectwo zarówno zdecydowanie ponadprzeciętnej matematycznej erudycji i dojrzałości autorki, jej biegłości technicznej i pomysłowości, jak i jej najlepiej pojętej naukowej pracowitości, w tym zdolności do samodzielnego poruszania się w gigantycznie rozległej literaturze. Tekst jest napisany przejrzyście i dojrzałe. Podczas lektury nie znalazłem błędów matematycznych, a wymienianie ewentualnych pomniejszych usterek stylu tekstu matematycznego w języku, który nie jest pierwszym językiem ani dla autorki, ani dla recenzenta, nie ma w takiej recenzji głębszego sensu. Moja najpoważniejsza uwaga krytyczna jest taka, że tekst byłby lepszy i jeszcze bardziej imponujący, gdyby wzbogacić go o możliwie liczne przykłady: proste przykłady konkretnych operatorów Dunkla (i ich zachowania) dla różnych systemów pierwiastków, mocniej zaznaczające różne motywacje do rozważania takich operatorów – także te, które wyrastają poza analizę harmoniczną i pozwalają w szerokiej perspektywie ocenić jej miejsce w matematyce. Proszę to jednak traktować jako marzenie recenzenta, którego spełnienie nie jest konieczne do tego, żeby moja ocena rozprawy była jednoznacznie i głęboko pozytywna, pełna szacunku dla autorki, jej talentu i jej osiągnięć.

Podsumowując, stwierdzam z pełnym przekonaniem, że rozprawa doktorska Pani mgr. Agnieszki Hejny przekracza wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania, stawiane takim rozprawom. Wnoszę o dopuszczenie autorki do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora, a także o uznanie rozprawy za wyróżniającą.