Recenzja rozprawy doktorskiej magister Alicji Kołodziejskiej

Spacery losowe w rzadkim losowym środowisku

Rozprawa doktorska Pani mgr Alicji Kołodziejskiej dotyczy zagadnień związanych z twierdzeniami granicznymi dla spacerów losowych w losowych ośrodkach. Wyniki zawarte w rozprawie dotyczą dwóch zagadnień: 1) twierdzeń granicznych typu *quenched*, lub *weak quenched*, dla pozycji oraz czasów przejścia dla cząstki wykonującej spacer i 2) twierdzeń typu *annealed* dla tzw *maksymalnych czasów lokalnych*. Zagadnienia te rozpatrywane są w środowiska z tzw. rzadką losowością (ang. *sparse randomness*)

Spacer losowy rozpatrywany w rozprawie jest to proces stochastyczny $(X_n)_{n\geq 0}$ z czasem n będacym nieujemną liczbą całkowitą, przyjmujący wartości na kracie całkowitoliczbowej $\mathbb{Z}$. Prawdopodobieństwo przejścia z pozycji k do pozycji $k \pm 1$ zależy od tego czy cząstka znajduje się w tzw miejscu zaznaczonym (*marked site*), czy też w miejscu "zwykłym". W tym drugim przypadku prawdopodobieństwa przejścia do sąsiednich miejsc wynoszą $1/2$. Jeśli cząstka jest w miejscu zaznaczonym to prawdopodobieństwa przejścia dane są przez zmienne losowe $\lambda \in (0,1)$ - prawdopodobieństwo ruchu w prawo, oraz $1-\lambda$ - prawdopodobieństwo ruchu w lewo. Ważnym obiektem wskazującym, w którą stronę cząstka preferuje ruch jest iloraz $\rho = \frac{1-\lambda}{\lambda}$. W przypadku miejsc niezaznaczonych $\rho = 1$, zaś w miejscach zaznaczonych ρ jest zmienną losową ($\rho < 1$ oznacza tendencję do ruchu w prawo). Wybór miejsc zaznaczonych dokonywany w następujący sposób. Losujemy niezależnie zmienne losowe ξ_ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}$ o wartościach w liczbach naturalnych dodatnich, opisującymi separację pomiędzy punktami zaznaczonymi na kracie. Przyjmujemy, iż miejscami zaznaczonymi są $S_0 = 0, S_n = \sum_{\ell=1}^n \xi_\ell\ , n > 0$ i $S_n = \sum_{\ell=n+1}^0 \xi_\ell\ , n < 0$. W miejscach tych określamy prawdopodobieństwa ruchu w prawo jako zmienne losowe λ_ℓ o wartościach w przedziale $(0,1)$. Zakładamy, iż wektory losowe $(\xi_\ell, \lambda_\ell), \ell \in \mathbb{Z}$ są niezależne o jednakowym rozkładzie. Tego typu środowisko, w polskim tłumaczeniu, nazwać można środowiskiem z rzadką losowością (ang. *sparse random environment*). Środowiska te uogólniają ośrodki, dla których wszystkie miejsca są zaznaczone $\xi_\ell = 1$, $\ell \in \mathbb{Z}$, wprowadzone do literatury probabilistycznej przez M. Kozlowa w pracy [Koz73] i nieco później przez F. Solomona, w pracy [28]. Ośrodki tego typu nazywane są w literaturze typu i.i.d., ze względu na sposób wyboru zmiennych losowych opisujących prawdopodobieństwa przejścia. Od tego czasu zagadnienie błądzenia przypadkowego na kracie z losowością typu i.i.d. było intensywnie badane.

Wyniki pracy dotyczą przypadku spacerów tranzytywnych, t.j. takich, że $\lim_{n\to+\infty} X_n = +\infty$. Warunkiem gwarantującym tranzytywność jest $\mathrm{E}\log\rho < +\infty$ (gdzie $\rho = \frac{1-\lambda}{\lambda}$). W przypadku ośrodków typu i.i.d. charakteryzacja granicznego rozkładu skalowanego położenia cząstki i jej czasów przejścia, w zależności od rozkładu zmiennej losowej ρ, podana była przez Kestena, Kozlowa i Spitzera w pracy [18]. Ze względu na dwa źródła losowości (ośrodek i wybór ścieżki spaceru) powstaje naturalne pytanie o wersję twierdzenia granicznego. Jeśli zbieżność rozkładów funkcjonału zachodzi względem produktowej miary probabilistycznej, to mówimy o tzw typie *annealed* twierdzenia granicznego. Taki charakter mają np wyniki [18]. Gdy natomiast zbieżność zachodzi prawie na pewno względem losowości ośrodka, to mówimy o tzw wersji *quenched* twierdzeń granicznych. W przypadku i.i.d. ta wersja zachodzi w przypadku gdy rozkład graniczny jest normalny, patrz [1] oraz [Gol27]. Wersja quenched może jednak nie zachodzić w przypadku gdy granica nie jest zmienną losową gaussowską, patrz [21], [24]. W pracy [23] wprowadza się pojęcie twierdzenia granicznego typu *weakly quenched*. W tym przypadku badana jest zbieżność wg rozkładu (na przestrzeni miar nad $\mathbb{R}$) losowych dystrybuant funkcjonału (położenia spacerowicza, lub scentrowanych czasów przejścia) do pewnych rozkładów granicznych zadanych na przestrzeni miar. Autorka podejmuje w swojej rozprawie temat quenched i weakly quenched wersji twierdzeń granicznych w przypadku środowisk z rzadką losowością.

Pierwszy wynik rozprawy -Twierdzenie 3.2.1- dotyczy centralnego twierdzenia granicznego (CTG) w wersji *quenched* (t.j. prawie na pewno względem środowiska losowego) dla spacerów losowych przy założeniach (3.2.1) dotyczących gęstości punktów zaznaczonych (*marked points*) oraz wielkości ilorazu ρ prawdopodobieństw wykonania przez cząstke kroku w prawo wersus prawdopodobieństwo kroku w lewo. Ważnym jest tutaj fakt istnienia momentu rzędu $2(1+\delta)$, przy $\delta > 0$ dla ilorazu oraz momentu rzędu $4(1+\delta)$ dla separacji pomiędzy punktami zaznaczonymi. Ponadto zakłada się też istnienie $2(1+\delta)$ -ego momentu dla iloczynu tych wielkości. Dowód Twierdzenia 3.2.1 uzyskany jest przez adaptację argumentu z pracy [15] dla odpowiednich spacerów losowych w środowiskach typu i.i.d. W Twierdzeniu 3.2.2 podano CTG, także w wersji *quenched* dla T_{S_N} - czasów pierwszego przejścia przez punkty zaznaczone.

Wyniki Rozdziału 4 rozprawy dotyczą sytuacji, w której miejsca zaznaczone występują rzadko. Ogony rozkładu zmiennych losowych ξ_ℓ są tym przypadku opisywane przez funkcję potęgową z wykładnikiem $\beta \in (0, 4)$, patrz wzór (4.2.1). W Twierdzeniu 4.2.1 sformułowana jest słaba zbieżność losowych rozkładów odpowiednio skalowanych oraz scentrowanych czasów przejścia do pewnego rozkładu granicznego. Rozkład ten odpowiada losowej mierze probabilistycznej na $\mathbb{R}$ zbudowanej przy pomocy miary poissonowskiej o zadanej intensywności i ciągu i.i.d. zmiennych losowych odpowiadających rozkładowi czasu wyjścia ruchu Browna z odcinka $[-1, 1]$, patrz wzór (4.2.3). Twierdzenie to dotyczy ośrodków, dla których wykładnik β charakteryzujący ciężar ogonów rozkładu zmiennej opisującej separację miejsc zaznaczonych należy do przedziału $(1, 4)$, patrz wzór (4.2.1). Wówczas wartość oczekiwana zmiennych ξ_ℓ jest skończona. Czynnik skalujący a_n zależy od wykładnika β.

Twierdzenie 4.2.2 mówi o sytuacji granicznej tzn gdy $\mathbb{E}\xi = +\infty$ oraz $\beta = 1$. W tym przypadku teza twierdzenia zbliżona jest do tezy Twierdzenia 4.2.1. Wynik zawarty w Twierdzeniu 4.2.3 dotyczy przypadku gdy punkty zaznaczone występują rzadko, t.j. $\mathbb{E}\xi = +\infty$ oraz $0 < \beta < 1$. Graniczny element losowy opisany jest wtedy przy pomocy miary losowej utworzonej na punktach skoku β-stabilnego subordynatora. Kontrastuje to z przypadkiem rozpatrywanym w Twierdzeniu 4.2.1, gdzie ze względu na to, iż punkty zaznaczone występowały często, do opisu miary losowej potrzeba było użyć losowej miary poissonowskiej. Zmienia się także czynnik skalujący. Wynosi on n^2 i jest niezależny od indeksu β. Twierdzenie 4.2.4 mówi, o tym, iż ciąg miar losowych rozpatrywany w poprzednich Twierdzeniach 4.2.1 i 4.2.3, nie jest zbieżny prawie na pewno, ze względu na losowość środowiska, w metryce Prochorowa. Nie zachodzą więc twierdzenia graniczne typu *quenched*, a wyniki typu *weakly quenched* są w tym sensie optymalne.

Jeśli chodzi o metodę dowodu Twierdzeń 4.2.1-4.2.3, to opiera się ona o szczegółową analizę czasów przejścia przez kolejne miejsca zaznaczone. Funkcjonały te rozkłada się, patrz prolog do Sekcji 4.3, na część $T^r_{S_n}$, która dominuje, i jest sumą zmiennych losowych niezależnych o tym samym rozkładzie (spacer odwiedza tylko miejsca pomiędzy kolejnymi punktami zaznaczonymi) oraz część zaniedbywalną będącą sumą zależnych zmiennych losowych. W tym ostatnim przypadku spacer może się cofać do miejsc poprzednio odwiedzanych generując zależność pomiędzy składnikami. Ten scenariusz nie realizuje się jednak zbyt często, ze względu na dryf w prawo, patrz Lemma 4.3.3. Dokładna charakteryzacja ogonów wariancji *quenched* zmiennej losowej $T^r_{S_n}$ podana jest w Corollary 4.3.2. Dowód twierdzeń granicznych prowadzi się przez argument z użyciem metody couplingu. Podany jest on w Sekcji 4.4 i sprowadza sytuację do przypadku zmiennych losowych niezależnych, patrz dowód Proposition 4.4.1. Rozważania stają się bardziej techniczne w przypadku gdy $\beta \in (0, 1]$.

W ostatnim rozdziale rozprawy autorka rozważa zagadnienie asymptotyki, gdy $n \to +\infty$, rozkładu maksymalnej liczby odwiedzin punktów kraty, $k \le n$ przed pierwszym przejściem przez położenie n. Wynik zawarty w Theorem 5.2.1 dotyczy sytuacji gdy punkty zaznaczone występują często, t.j. w szczególności istnieje moment rzędu $\alpha \vee 1$ zmiennej opisującej sepraację. Pozostałe założenia zawarte są w sformułowanej hipotezie (A). W Theorem 5.2.2 podany jest podobny wynik przy nieco innych warunkach, patrz hipoteza (B). Lemma 5.2.3 mówi, iż w przypadku gdy istnieje moment dla separacji, to skalowane rozkłady maksymalnej liczby odwiedzin punktów kraty, przed położeniem n i n-tym położeniem zaznaczonym różnią się tylko czynnikiem stałym w wyrażeniu opisującym rozkład graniczny. Do dowodów Theorem 5.2.1 oraz Theorem 5.2.2 przeprowadzonych odpowiednio w Sekcjach 5.4 i 5.5, używa pewnego procesu gałązkowego, którego konstrunkcja i własności opisane są w Sekcji 5.3. Dowody te są dość techniczne i pokazują, iż doktorantka świetnie sobie radzi używając zaawansowanych narzędzi potrzebnych do ich przeprowadzenia.

Podsumowanie

Przedstawioną mi rozprawę doktorską **oceniam bardzo wysoko**. Zaproponowany model błądzenia przypadkowego z rzadkimi miejscami losowymi jest ciekawy i prowadzi do nietrywialnych rezultatów. Środowiska tego typu charakteryzują się brakiem jednorodności rozkładów (t.j. rozkład środowiska nie jest niezmienniczy ze względu na grupę przesunięć działającą na kracie). Tematyka rozprawy jest ważna i znajduje się w centrum zainteresowań badawczych probabilistów pracujących w czołowych ośrodkach naukowych na świecie.

Praca jest zaawansowana technicznie, co dowodzi, iż doktorantka potrafiła opanować trudne narzędzia używane w tej dziedzinie. Dowodem tego, iż wyniki zawarte w rozprawie są ważne jest też fakt, iż częśc z nich ukazała się w bardzo dobrym czasopiśmie probabilistycznym jakim jest *Electronic Journal of Probability*.

Uwagi

- W redakcji rozprawy podoba mi się fakt, iż każdy z rozdziałów zaopatrzony jest w prolog, w którym przedstawiona jest tematyka danego rozdziału i omówione są skrótowo wyniki w nim zawarte.
- W wypowiedzi Twierdzeń 3.2.1 oraz 3.2.2, warto byłoby podać, iż wariancje σ i $\tilde{\sigma}$ granicznych rozkładów normalnych nie zależą od ω. Wynika to z dowodów, ale warto byłoby uwzględnić ten fakt w wypowiedzi twierdzeń.

- Praca jest chwilami trudna do czytania. Autorka kilka razy odnosi się w niej do pojęć niewprowadzonych, np $T''(S_k, S_{k+1})$ na str 11, $F_k(j, m)$ na str 13... Nie ułatwia to lektury rozprawy.
- Wypowiedzi warunków, np założeń sformułowanych w rozdziałach 4 i 5 można byłoby spróbować zaopatrzeć w intuicje związane z nimi. Brakuje mi trochę takich wyjaśnień.
- Czy coś można powiedzieć o przypadku gdy (ξ_ℓ, λ_ℓ), $\ell \in \mathbb{Z}$ jest jedynie stacjonarny (niekoniecznie i.i.d.)?
- Intryguje mnie warunek $\mathrm{E}\rho^\alpha = 1$ w założeniu (A) na str 52. Czy istnieje jakaś intuicja, która za nim stoi?
- Na str 53 znajduje się uwaga, iż w przypadku gdy zachodzi założenie (B) oraz $\mathrm{E}\rho^\alpha = 1$, to $\mathrm{E}\xi^\alpha = +\infty$. Czy autorka mogłaby to wyjaśnić?
- Czy można porównać wyniki zawarte w Theorem 5.2.1 i Theorem 5.2.2?
- Ta uwaga odnosi się do wzorów (2.2.1), (2.2.2), a także do innych części technicznych wyników zawartych w rozprawie (np Lemma 2.3.3). Czy istnieje jakaś intuicja odnosząca się do wprowadzonych w tych wzorach wielkościach, np R_j, W_j. Napisanie paru słów o tym pomogłoby znacznie czytelnikowi rozprawy.
- Lemma 2.2.2. Przydałoby się więcej szczegółów jak wzory (2.2.5) wynikają z rekursji wyprowadzonej w dowodzie. Doktorantka wyjaśniła mi detale poprzez wymianę mejlową.
- p. 11, dowód Lematu 2.3.1. Co to jest $T''(S_k, S_{k+1})$?
- p. 12. Uwaga terminologiczna. Wydaje mi się, że *formal proof* (2.3.1), nie uwzględniający potrzeby pokazania, iż momenty są skończone, etc, został już przeprowadzony. Krok, w którym dowodzi się brakujących faktów nazywa się chyba *rigorous proof*.
- p. 13, dowód Lematu 2.3.3. Ułatwiłoby czytelnikowi wskazanie w paru słowach jak (2.3.8) i (2.3.9) wynikają z Lematu 2.1.1. Co to jest $F_k(j, m)$?
- p. 15, może warto wyjaśnić dlaczego $r(x)$ jest wypukła.
- p. 16, co to jest $\mathcal{M}_p((0, +\infty))$?
- Autorka powinna w jasny sposób oddzielić swoje (nowe) wyniki od tych pochodzących z literatury. Np używanie symbolu * przy wynikach cytowanych bardzo by pomogło. Jako czytelnikowi ciężko było mi dokonać rozróżnienia.
- p. 25, po wzorze (4.1.1) wypadałoby napisać, iż $\mathbb{E}\theta = 1/2$. Pomogłoby to w zrozumieniu dlaczego zmienna losowa $\sum_i x_i(2\theta - i - 1)$ jest scentrowana...

- p. 26, po wypowiedzi założeń (4.2.2) przydałaby się jakaś intuicja co do ich znaczenia. Czy warunki te są optymalne?
- W uwadze po wzorze (4.2.2) *Without loss of generality...* warto byłoby napisać dlaczego można założyć rzeczone warunki bez straty ogólności rozważań.

Literatura

[Gold 07] I. Ya. Goldsheid. Simple transient random walks in one-dimensional random environment: The central limit theorem. Probab. Theory Related Fields 139 (2007) 41–64. MR2322691

[Koz73] M.V.Kozlov: A random walk on the line with stochastic structure.Teor.Veroyat. Prim. 18 (1973) 406-408.

T. Komorowski

Signed by /
Podpisano przez:

Tomasz Andrzej
Komorowski

Date / Data:
2024-09-27 10:04

Tomasz Komorowski

Lublin, 24 września, 2024 r.