Prof. dr hab. Wojciech Niemiro
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Recenzja poprawionej wersji rozprawy doktorskiej

pt. „Applications of Markov chains dualities in gambler's ruin problem and perfect sampling"

mgr Piotra Markowskiego

Zawartość rozprawy

Rozprawa składa się z 3 powiązanych tematycznie, ale samodzielnych części. Dwie z nich są to artykuły napisane wspólnie z promotorem i opublikowane, odpowiednio, w *Markov Processes and Related Fields* (2017) oraz *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics* (2022). Trzecia część jest też wspólnym artykułem z promotorem, na razie nieopublikowanym. Jak wynika z deklaracji Autora we wstępie do rozprawy (Introduction), P. Markowski miał znaczący wkład w osiągnięte, zamieszczone w rozprawie wyniki.

Rozprawa P. Markowskiego dotyczy łańcuchów Markowa na skończonej przestrzeni stanów. Wspólnym mianownikiem wszystkich 3 części rozprawy jest dualność pomiędzy łańcuchami ergodycznymi i łańcuchami ze stanami pochłaniającymi. Rozważane są dwa pojęcia dualności: dualność w sensie Siegmunda i dualność w sensie SSD (Strong Stationary Dual, pochodząca od Diaconisa i Filla).

Omówienie i ocena wyników

Rozdział 1 rozprawy jest skonstruowany w następujący sposób. Punktem wyjścia jest spostrzeżenie, że efektywna implementacja algorytmów symulacji doskonałej (Perfect Simulation) wymaga założeń o monotoniczności wyjściowego łańcucha Markowa. Wspomniane są 3 algorytmy symulacji doskonałej (CFTP, algorytm Filla i algorytm oparty na mocnych czasach stacjonarnych,

W

SST), związane z 3 typami monotoniczności (monotoniczność realizowalna, stochastyczna i Möbiusa). Pozostała część Rozdziału 1 poświęcona jest systematycznemu badaniu relacji pomiędzy różnymi typami monotoniczności. Nie wydaje się, żeby zastosowanie do symulacji doskonałej było rzeczywistą motywacją artykułu, prezentowanego jako Rozdział 1. Algorytm 4 oparty na SST jest we Wstępie określony jako nowy, ale w istocie jego nowość polega na połączeniu dwóch znanych faktów. Ogólna konstrukcja SST należy do Diaconisa i Filla (1990). Charakteryzacja istnienia SSD w terminach monotoniczności Möbiusa była udowodniona przez Lorka i Szekli (2012, 2016). Niewątpliwą nowością w omawianym artykule jest dokładne wyjaśnienie relacji pomiędzy różnymi typami monotoniczności. Twierdzenie 5.1 daje, jak słusznie sformułował Autor, niemal pełną charakteryzację. Twierdzenie 5.2 jest uzupełnieniem Twierdzenia 5.1 w szczególnym przypadku porządków drzewiastych (dla porządku liniowego relacje są proste i dobrze znane). Dowody obu twierdzeń należą do Autora rozprawy istanowią istotny wkład we wspólną pracę z promotorem. Ostatnia, obszerna część Rozdziału 1 zawiera szereg przykładów ilustrujących Twierdzenia 5.1 i 5.2. Przykłady pokazują, które spośród implikacji w tych twierdzeniach nie dają się odwrócić. Konstrukcja tych przykładów wymagała pomysłowości, żmudnej pracy i wspomagania komputerowego.

Rozdział 2 poświęcony jest wielowymiarowym zagadnieniom ruiny gracza. Wyprowadzone są wzory na prawdopodobieństwo ruiny i wzory na funkcję generującą momenty czasu gry. Wyniki mają charakter „decouplingu": rozwiązanie dla przypadku wielowymiarowego wyraża sie przez odpowiednie wielkości dla gier jednowymiarowych. Poza eksploatowaniem dualności, podstawowym narzędziem używanym w tym rozdziale jest reprezentacja macierzy wielowymiarowego łańcucha przez iloczyny Kroneckera. Chociaż zasadniczy pomysł tej techniki został zaproponowany przez Bartłomieja Błaszczyszyna, to przeprowadzenie dowodów zasadniczych twierdzeń należy do Autora rozprawy. Dowody wymagały dużej sprawności rachunkowej i świadczą o opanowaniu przez mgr Markowskiego warsztatu pracy matematycznej. Twierdzenie 2.1 podaje prawdopodobieństwo ruiny w modelu uogólniającym wcześniejsze wyniki Lorka. Twierdzenie 2.3 wyraża rozkład czasu gry przez rozkład czasu do pochłonięcia dla czystego procesu urodzeń. Rozdział 2 uzupełnia seria przykładów, w których wyprowadzone są jawne wzory, wynikające z udowodnionych wcześniej twierdzeń.

W

Rozdział 3 dotyczy warunkowego rozkładu czasu gry pod warunkiem wygranej (lub, symetrycznie, przegranej). Rozważana jest gra jednowymiarowa. Wydaje się, że główną motywacją był klasyczny wynik Beyera i Watermana (1977) dotyczący ciekawej, raczej paradoksalnej symetrii. Autorom Rozdziału 3 udało się udowodnić analogiczną własność symetrii przy dużo ogólniejszych założeniach (prawdopodobieństwa wygranej $p(j), q(j)$ zależne od stanu, ale $p(j)/q(j) = r$ stałe). Wyniki w tym rozdziale ograniczają się, w odróżnieniu od klasycznego przypadku, do wartości oczekiwanej warunkowego czasu gry. Wyprowadzone wzory na wartość oczekiwaną są, w rozważanym ogólnym przypadku, nowe. Dowody są oparte na klasycznym schemacie „first step analysis", ale szczegóły rachunkowe są niebanalne.

Ciekawym „produktem ubocznym" (określenie Autora) w Rozdziale 3 jest oszacowanie wartości oczekiwanej optymalnego SST (FSST) dla błądzenia po okręgu. Wynik osiągnięty w rozprawie jest o stałą addytywną równą 3/4 lepszy, niż otrzymane przez Diaconisa i Filla oszacowanie dla suboptymalnego SST. Poprawienie rezultatu Diaconisa i Filla jest niełatwym dokonaniem, wynik jest elegancki i wykończony. Z drugiej strony, symetryczne błądzenie po okręgu ma charakter „toy example" ilustrującego metody analizy, ale nie mającego znaczenia praktycznego. Dowód Lematu 4.1 jest dziełem P. Markowskiego.

Podsumowanie całości rozprawy

Widoczna jest fascynacja Autora rozprawy (i współautora) jawnymi wzorami i twierdzeniami doprowadzonymi do optymalnej postaci. Taki charakter ma na przykład Twierdzenie 5.1 w Rozdziale 1. Nacisk położony jest na przykłady możliwe do przanalizowania „do końca". Na drugi plan schodzi faktyczna motywacja badań, czyli matematyczne modele rzeczywistych sytuacji (realistyczne zastosowania symulacji doskonałej, modele gier mające zastosowanie pozamatematyczne). W tytule rozprawy umieszczona jest symulacja doskonała, ale nie ma ani jednego realistycznego przykładu jej zastosowania (przykłady w Rodzdziale 1 służą tylko do pokazania relacji między monotonicznościami, niczemu więcej). Mocnym punktem rozprawy są twarde rachunki i dokładne wzory. Słabszym punktem jest, mimo wszystko, brak *samodzielnych* publikacji Autora.

WV

Konkluzja

Poprawiona wersja rozprawy doktorskiej P. Markowskiego zawiera informacje, pozwalające ocenić wkład Autora w otrzymanie wspólnych wyników. Jest to wkład znaczący. Wyniki są nowe i wartościowe. Mogę zatem z przekonaniem stwierdzić, że rozprawa spełnia formalne i zwyczajowe warunki niezbędne do uzyskania stopnia doktora nauk matematycznych. Wnoszę o dopuszczenie mgr P. Markowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

WNiemiro.

Wojciech Niemiro

Warszawa, 21.06.2022