Wrocław, 27.11.2022

dr hab. inż. Zbigniew Michna, prof. uczelni
Katedra Badań Operacyjnych i Inteligencji Biznesowej
Politechnika Wrocławska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Adama Kaszubowskiego pt. „Problemy wyjścia dla procesów typu Lévy'ego oraz ich zastosowania"

Rozprawa mgr. Adama Kaszubowskiego zajmuje się problemem optymalnej wypłaty dywidendy, gdy bazowym procesem jest ujemnie spektralny proces Lévy'ego. Problem ten datuje swoje początki w matematyce stosowanej od pracy de Fineti'ego z 1957 roku [3]. Od tego czasu powstaje wiele artykułów na ten temat, a lawinowy ich wzrost zaczyna się od wykorzystania identyczności fluktuacyjnych korzystających z funkcji skalujących dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego.

Przechodząc do szczegółów rozprawa składa się ze wstępu, trzech rozdziałów i bibliografii. We wstępie autor zarysowuje badane problemy, w szczególności przedstawia rodzaje ruiny badane w pracy i rozważane procesy bazowe w modelach. Ponadto doktorant dokładnie przedstawia swój wkład do współautorskich publikacji i tłumaczy dlaczego rozważany proces w rozdziale drugim jest inny (zmodyfikowany) niż proces w artykule, na którym opiera się praca.

Rozdział pierwszy przedstawia definicję, podstawowe własności i przykłady procesów Lévy'ego. Ponadto opisane są procesy Markowa, półgrupy przejścia dla procesów Markowa i ich operatory infinitezymalne. Następnie autor definiuje funkcje skalujące dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego i podstawowe identyczności fluktuacyjne dla czasów wyjścia dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego. Opisane są również własności funkcji skalujących i ich postać dla liniowego procesu Wienera, klasycznego procesu ryzyka i procesów stabilnych Lévy'ego. W następnym podrozdziale autor prezentuje rozwiązanie problemu optymalnej dywidendy dla spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego na podstawie artykułu Loeffena [6] cytując również tzw. lemat weryfikacyjny (nierówność Hamiltona-Jacobi'ego-Bellmana). W ostatnim podrozdziale prezentowane są elementy rachunku stochastycznego tzn. wahanie kwadratowe semimartyngału, wzór Itô dla semimartyngałów i jego uogólnienia. Podsumowując, wstęp i rozdział pierwszy wydaje się, że zostały dość jasno

Z. Michna

i zgrabnie przedstawione. We wstępie brakuje poglądowego rysunku jak wygląda trajektoria procesu wstępnie rozważanego w artykule Czarna, Kaszubowski [1] i trajektoria procesu zmodyfikowanego rozważanego w rozdziale drugim a przynajmniej rysunek trajektorii procesu R dla zadanego X. Ponadto przy definicji tzw. bankructwa omega we wstępie dobrze byłoby podać przykład funkcji ω_1 w definicji funkcji ω bo tak naprawdę nie widać czym jest ten rodzaj ruiny. Jeśli proces X jest poniżej poziomu d (rozumiem, że d jest ujemne) następuje od razu ruina, natomiast powyżej poziomu d mamy w szczególnym przypadku skumulowaną ruinę paryską po losowym wykładniczym czasie.

W rozdziale drugim doktorant rozpatruje załamany proces Lévyego z wypłatą dywidendy, kosztami transakcyjnymi przy wypłacie dywidendy i bankructwem określonym poprzez ruinę paryską. Najpierw cytowane są wyniki dla problemu wyjścia dla załamanego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego. Następnie rozważana jest tzw. ruina paryska i prezentowane są rozwiązania dla problemu wyjścia przed zajściem ruiny paryskiej. W podrodziale 2.4 doktorant wprowadza do modelu proces wypłaty dywidendy wraz z kosztami transakcyjnymi i to określa nowy model do tej pory nierozpatrywany. W tym miejscu brakuje mi dokładnej interpretacji ekonomicznej poszczególnych procesów. Rozumiem, że proces bazowy X (spektralnie ujemny proces Léyy'ego) opisuje nadwyżkę finansową (rezerwę) danego portfela ubezpieczeniowego. Autor określa go tylko jako proces nadwyżki (surplus process). Tu nie rozumiem czym jest załamanie procesu z dryfem $\delta > 0$ bo jest ono podobnie jak dywidenda odejmowane a autor pisze, że jest to zastrzyk finansowy dla firmy ubezpieczeniowej jeśli rezerwy są poniżej zera. Natomiast w rów. (2.7) mamy $-\delta \mathbb{I}_{\{U_t^\pi > 0\}} dt$. Jeśli proces X miałby opisywać tzw. nadwyżkę roszczeń (nadwyżkę roszczeń nad wpływami) wtedy nie powinniśmy odejmować procesu dywidendy. Tak więc w tej części pracy wydaję mi się, że brakuje solidnej interpretacji ekonomiczno-praktycznej poszczególnych procesów stochastycznych i ich składowych. Mam nadzieję, że doktorant postara się to wyjaśnić w czasie obrony. Następnie wprowadzona zostaje rodzina strategii impulsu z progami c_1 i c_2 (jeśli proces nadwyżki finansowej przekroczy c_2 to wypłacana jest dywidenda do poziomu c_1), do której zostaje zawężony problem optymalizacyjny tzn. maksymalizacja średniej zdyskontowanej wypłaty dywidendy z kosztami transakcyjnymi do momenty wystąpienia ruiny paryskiej. Kluczowy jest tu lemat weryfikacyjny (Lemat 2.4.6) dla tak określonego modelu, który zostaje udowodniony przy użyciu wzoru Bouleau i Yora (rozszerzona wersja wzoru Itô) a następnie twierdzenie 2.4.10 wyznaczające optymalną strategię impulsu. W ostatnim podrozdziale prezentowane są dwa przykłady - liniowy ruch Browna i klasyczny proces ryzyka z wykładniczymi roszczeniami. Dla liniowego ruchu Browna zostaje pokazane, że istnieje jedna optymalna para barier c_1 i c_2. Następnie doktorant wyznacza optymalne bariery w zależności od kosztów transakcyjnych dywidendy β, parametru ruiny paryskiej r (długość tzw. czerwonej strefy) i parametru dryfu złamania δ. Ciekawe jest, że linie opisujące optymalne bariery nie są ciągłe. Powstaje pytanie, czy jest to niedoskonałość obliczeń numerycznych czy można to wytłumaczyć na podstawie wyprowadzonych wzorów? W przykładzie zawierającym klasyczny proces ryzyka pokazane zostaje, że istnieje jedna optymalna para barier c_1 i c_2 i podobnie jak dla liniowego ruchu Browna zostają wyznaczone bariery w zależności od kosztów

Z. Mich...

transakcyjnych dywidendy β, parametru ruiny paryskiej r i parametru dryfu złamania δ. W przeciwieństwie do poprzedniego przykładu linie opisujące optymalne bariery są ciągłe.

W rozdziale trzecim doktorant wprowadza addytywny proces Markowa, który ma opisywać rezerwę firmy ubezpieczeniowej przy założeniu zmieniających się warunków zewnętrznych wpływających na wartość rezerwy. Proces opisujący addytywną składową jest spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego i proces opisujący stany warunków zewnętrznych jest łańcuchem Markowa ze skończoną liczbą stanów. Ponadto wielkości przejścia pomiędzy stanami są niedodatnie. Dla tak określonego procesu wyznacza się macierzowy analog wykładnika Laplace'a dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego. W rozdziale tym pojawia się notacja typu $\mathbb{E}[e^{\alpha X_t}, J_t = j | J_0 = i]$, która wydaje mi się, że jest rozumiana jako $\mathbb{E}[e^{\alpha X_t} \mathbb{I}\{J_t = j\} | J_0 = i]$ ale nigdzie nie jest to określone. Autor cytuje tożsamości fluktuacyjne dla problemów wyjścia w języku tzw. macierzy skalujących (rozszerzenie funkcji skalujących). W następnym podrozdziale doktorant przytacza macierze skalujące dla ciągłego modulowanego ruchu Browna wraz z ich własnościami. W podrozdziale 3.2.1 autor definiuje tzw. ω-zabijanie (ω-killing). Z równania (3.10) i następnego wynika, że jest to pewna forma dyskontowania ale z równania (3.11) wynika, że jest to pewna forma ruiny. We wstępie podane jest, że funkcja $\omega(x)$ jest dodatnia, gdy argument jest ujemny tak więc może to być np. $\mathbb{I}(x < 0)$ i wtedy τ_ω z (3.11) będzie paryską ruiną z $r = e_1$. Natomiast ostatnia wartość oczekiwana w podrozdziale 3.2.1 ma interpretację jednostkowej wypłaty zdyskontowanej funkcją ω. Rozumiem, że wprowadzona funkcja ω ma dwie interpretacje: stopa dyskontowa zależna od wartości procesu i kara za przebywanie w tzw. czerwonej strefie dająca wkład do ruiny. Dla lepszego zrozumienia wprowadzonego tu pojęcia dobrze byłoby zademonstrować kilka oddzielnych przykładów dla obu interpretacji. W następnej części pracy doktorant cytuje wyniki Li i Palmowski [5] dla szczególnego przypadku wcześniej wprowadzonego modelu tzn. dla procesu rezerwy opisanego przez spektralnie ujemny proces Lévy'ego (addytywny proces Markowa z jednym stanem). Pytanie o interpretacje z poprzedniego podrozdziału pozostaje tutaj aktualne dla $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. W podrozdziale 3.2.3 rozważany jest klasyczny model ryzyka z wykładniczymi roszczeniami. Ruina jest określona poprzez ω-zabijanie po czasie o rozkładzie wykładniczym lub zejście procesu poniżej pewnej bariery $-d$ ($d > 0$). Autor wyprowadza dokładny wzór na prawdopobieństwo ruiny, które jest postaci jak w klasycznej ruinie a ω-zabijanie i poziom $-d$ ma wpływ na stałą przed exponentą niezależną od kapitału początkowego. Ponadto w podrozdziale tym przeprowadzone jest porównanie prawdopodobieństwa klasycznej ruiny i prawdopodobieństwa ruiny określonego poprzez ω-zabijanie i poziom $-d$. Wprowadzenie ruiny typu ω-zabijanie po niezależnym czasie o rozkładzie wykładniczym jest raczej ułatwieniem zadania i z praktycznego punktu widzenia ciekawsze byłoby i chyba trudniejsze matematycznie rozpatrzenie ω-zabijania po ustalonym deterministycznym czasie. W dalszej części pracy wyprowadzane są identyczności fluktuacyjne i identyczności dla kernela rezolwenty dla spektralnie ujemnego addytywnego procesu Markowa z ω-zabijaniem. Identyczności te pozwalają w kolejnym podrozdziale wyprowadzić wzór na zdyskontowaną wartość oczekiwaną dywidendy barierowej do momentu tzw. omega ruiny tzn., gdy ruina zachodzi poprzez ω-zabijanie lub po-

Z. Michna

przez klasyczną ruinę $d = 0$ (jest to macierz pod warunkiem stanu $J_0 = i$ i na zbiorze $J_{\tau_\omega} = j$ - tak rozumiem tę notację). Rozumiem, że tu dopuszczamy aby $\omega(x) \geq 0$ dla pewnych x dodatnich bo w przeciwnym razie wszystko zredukowałby się do klasycznej ruiny. Korzystając z argumentu przesunięcia jako wniosek doktorant otrzymuje wartość oczekiwaną zdyskontowanej dywidendy do momentu omega ruiny przy dowolnym $d \geq 0$. Końcowa cześć rozdziału trzeciego poświęcona jest przykładom dla markowsko modulowanego ruchu Browna. Autor wyznacza ω-skalujące macierze dla funkcji ω zależnej tylko od wartości modulującego procesu Markowa J i dla schodkowych zależnych od pozycji procesu X funkcji ω. W podrozdziale 3.5.3 dla pewnej funkcji ω rozważanej w artykule Li i Palmowski [5] dla markowsko modulowanego ruchu Browna zostają wyznaczone równania różniczkowe dla ω-skalujących macierzy. Ponadto dla dwustanowego markowsko modulowanego ruchu Browna aproksymowana jest wartość oczekiwana zdyskontowanej dywidendy, która jest przedstawiona w postaci mapy cieplnej zmiennych kapitał początkowy x i bariera dywidendy c. Wartość optymalnej bariery można odczytać tylko w przybliżeniu z mapy cieplnej. Wcześniej są przedstawione wykresy ω-skalujących macierzy dla danych stanów. W ostatniej części rozdziału trzeciego doktorant rozważa markowsko modulowany ruch Browna, dla którego znajduje prawdopodobieństwo klasycznej ruiny na skończonym wykładniczym horyzoncie czasu i nieskończonym horyzoncie czasu. Następnie dla dwustanowego markowsko modulowanego ruchu Browna na podstawie symulacji Monte Carlo aproksymowane jest prawdopodobieństwo omega ruiny. Rozumiem, że w przeciwieństwie do klasycznego procesu ryzyka z wykładniczymi roszczeniami nie udało się tu znaleźć analogicznego rezultatu do Stwierdzenia 3.2.3 stąd symulacje metodą Monte Carlo dla omega ruiny dla markowsko modulowanego ruchu Browna.

Tak więc podsumowując, podjęta tematyka rozprawy jest bardzo ciekawa ze względu na to, że bazuje na procesach Lévy'ego, które cieszą się obecnie bardzo dużym zainteresowaniem probabilistów i praktyków. Wkładem doktoranta są tu uogólnienia tożsamości fluktuacyjnych dla spektralnie ujemnych addytywnych procesów Markowa z ω-zabijaniem. Ponadto autor znajduje optymalne bariery dla impulsowej strategii wypłaty dywidendy z kosztami transakcyjnymi do momentu ruiny paryskiej przy założeniu, że proces nadwyżki finansowej jest ujemnie spektralnym załamanym procesem Lévy'ego. Wyniki są poprawne matematycznie. Doktorant korzysta z zaawansowanych pojęć i rezultatów związanych z procesami Markowa i procesami Lévy'ego jak generatory infinitezymalne półgrupy przejść procesów markowskich, równanie Hamiltona-Jacobi'ego-Bellmana, elementy rachunku stochastycznego, funkcje skalujące i tożsamości fluktuacyjne. Ponadto doktorant korzysta z metod numerycznych i metod Monte Carlo. Literatura rozprawy zawiera 40 pozycji i są to głównie publikacje z najlepszych czasopism probabilistyki stosowanej i modelowania stochastycznego. Ponadto cytowane artykuły są głównie nowymi pozycjami opublikowanymi kilka do kilkunastu lat temu wraz z pracami Asmussena, Gerbera, Yora czy Shiryaeva co potwierdza, że temat pracy jest aktualny i cieszący się dużym zainteresowaniem wśród probabilistów. Doktorant cytuje dwa artykuły, których jest współautorem, opublikowane w wysoko punktowanych czasopismach: Journal of Optimization Theory and Applications [1] i Advances in Applied Probability [2]. Natomiast jest autorem jednego artykułu, który ukazał się w Silesian Statistical Review

Z. Michna

[4]. Ponadto doktorant prezentuje oryginalne wyniki, które są interesujące z matematycznego punktu widzenia jak również mające zastosowanie w ubezpieczeniach i finansach. Tak więc kończąc, rozprawa spełnia wymagania stawiane dysertacjom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. Adama Kaszubowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z. Michna

Bibliografia

[1] I. Czarna, A. Kaszubowski *Optimality of impulse control problem in refracted Lévy model with Parisian ruin and transaction costs.* Journal of Optimization Theory and Applications, 185:982–1007, 2020.

[2] I. Czarna, A. Kaszubowski, S. Li, Z. Palmowski *Fluctuation identities for Omega-killed spectrally negative Markov additive processes and dividend problem.* Advances in Applied Probability, 52(2):404–432, 2020.

[3] B. de Finetti. *Su unímpostazion alternativa dell teoria collecttiva del rischio.* Transactions of the XVth International Congress of Actuaries, 2:433–443, 1957.

[4] A. Kaszubowski *Omega bankruptcy for different Lévy models.* Silesian Statistical Review, 17(23):31–57, 2019.

[5] B. Li, Z. Palmowski *Fluctuations of omega-killed spectrally negative Lévy processes.* Stoch. Process. Appl., 128(10):3273–3299, 2018.

[6] R.L. Loeffen *On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes.* Ann. Appl. Prob., 18(5):1669–1680, 2008.

Zbigniew Michna

Z. Michna