Wrocław, 12.07.2020

dr hab. Zbigniew Michna, prof. UE
Katedra Logistyki
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Michała Krawca pt. „Drift change detection in models based on Lévy processes with applications to mortality analysis"

Rozprawa mgr. Michała Krawca zajmuje się detekcją zmiany dryfu dla procesów Lévy'ego. Problem datuje swoje początki w latach sześćdziesiątych w pracach Alberta N. Shiryaev'a ucznia Andreya N. Kolmogorova, gdzie rozważanym modelem jest proces Wienera. Problem polega na znalezieniu optymalnego w pewnym sensie czasu zatrzymania, który przybliża nieobserwowalną zmienną losową tzn. niemierzalną względem naturalnej filtracji procesu. Przechodząc do szczegółów rozprawa doktorska składa się z czterech rozdziałów. W rozdziale drugim po rozdziale wstępnym autor dokładnie przedstawia problem rozwiązany przez A.N. Shiryaev'a. W modelu tym zakłada się, że badany proces to ruch Browna a po losowej zmianie dryfu θ jest to niezależny ruch Browna z liniowym dryfem. Tak zwany moment zmiany dryfu θ jest zmienną losową posiadającą atom w zerze (brak zmiany dryfu) a pod warunkiem, że moment ten jest większy od zera zmienną losową o rozkładzie wykładniczym i jest to zmienna losowa niezależna od obu procesów Wienera co nie jest napisane na początku w pracy a wynika dopiero z konstrukcji ogólnego modelu w rozdziale czwartym. Problem optymalizacyjny polega na znalezieniu czasu zatrzymania (momentu alarmu), który jednocześnie minimalizuje prawdopodobieństwo fałszywego (wcześniejszego) alarmu (moment zatrzymania jest mniejszy od czasu zmiany dryfu) i wartość średnią opóźnienia alarmu (ich kombinację liniową). Problem optymalizacyjny można sprowadzić do optymalizacji pewnej funkcji od prawdopodobieństwa warunkowego zmiennej zmiany dryfu względem filtracji procesu i otrzymuje się kluczowy proces π, który jest procesem Markowa jak dalej w pracy jest pokazane. Następnie zgodnie z wynikami Shiryaev'a problem optymalizacyjny jest równoważny rozwiązaniu tzw. problemu Stefana. A mianowicie należy znaleźć generator infinitezymalny dla półgrupy generowanej przez proces Markowa π i następnie rozwiązanie

Z. Michna

pewnego równania związanego z generatorem i pewnymi warunkami brzegowymi daje szukaną optymalną wartość funkcji i próg A^* dla optymalnego czasu alarmu. Dokładnie, optymalny czas zatrzymania jest pierwszym momentem kiedy proces π przebija poziom A^*. Tak więc głównym zadaniem jest wyznaczenie odpowiedniej reprezentacji dla procesu Markowa π. W tym celu konstruuje się najpierw dwie miary prawdopodobieństwa na przestrzeni, na której zdefiniowany jest proces. Miary te są równoważne poprzez transformację Esschera'a (po obcięciu do historii do momentu t - $\mathcal{F}_t$) i względem jednej miary proces jest procesem przed zmianą dryfu a względem drugiej procesem stochastycznym po zmianie dryfu. Przy pochodnej Radona-Nikodyma korzysta się z reprezentacji Lévy'ego-Chinczyna, która nie jest jednoznaczna jeśli chodzi o wektor (stałą z trójki wyznaczającej proces Lévy'ego) i wygodnie dla czytelnika byłoby, gdyby ta reprezentacja była umieszczona w pracy (używana jest reprezentacja z książki Kyprianou [2]). Następnie konstruowana jest trzecia rodzina miar indeksowanych przez s równoważna z dwiema poprzednimi, względem której zmiana dryfu następuje dokładnie w chwili s. Pozwala to zapisać kluczowy proces π za pomocą otrzymanych pochodnych Radona-Nikodyma a następnie pokazać, że proces π jest procesem Markowa a dokładnie dyfuzją Itô spełniając odpowiednie stochastyczne równanie różniczkowe. Tak więc umożliwia to znalezienie infinitezymalnego generatora dla półgrupy generowanej przez proces π i co za tym idzie rozwiązanie problemu Stefana czyli wyznaczenie optymalnej funkcji dla alarmu i progu A^* dla optymalnego czasu zatrzymania. Rezultat ten należy do Shiryaev'a [4]. W następnym podrozdziale rozdziału drugiego autor wprowadza tzw. uogólnioną statystkę Shiryaev'a-Roberts'a, która aproksymuje pewien proces pomocniczy związany z procesem π w przypadku dyskretyzacji procesu X i pozwala estymować moment optymalnego alarmu. Następny podrozdział przedstawia zastosowanie modelu Shiryaev'a do tablic życia a mianowicie do detekcji zmiany trendu siły umieralności. Jak zaznacza autor jest to nowatorskie wykorzystanie modelu detekcji zmiany dryfu do tablic trwania życia. Ten aplikacyjny przykład jest klarownie opisany wraz z kalibracją parametrów modelu. Podobnie, rysunki i wnioski są przejrzyste i spójne. Dobór parametru dryfu r jest odpowiedzialny za czułość detekcji natomiast estymacja prawdopodobieństwa x (natychmiastowej zmiany dryfu) i parametru λ (odpowiedzialnego za średni czas zmiamy dryfu pod warunkiem, że jest większy od 0) wymagałby chyba większej ilości danych (tablic trwania życia).

W rozdziale trzecim autor uogólnia model z poprzedniego rozdziału tzn. dodaje scentrowany złożony proces Poissona i otrzymuje skokową dyfuzję. Problem znalezienia optymalnego czasu zatrzymania w tym modelu jest również równoważany rozwiązaniu problemu Stefana co jest pokazane dalej w Tw 3.1. Tak więc należy zidentyfikować generator infinitezymalny dla procesu π, który podobnie jak poprzednio jest prawdopodobieństwem a posteriori czasu zmiany dryfu. Następnie definiuje się pewne pawdopobieństwa na wyjściowej przestrzeni jako równoważne miary. Pozwala to znaleźć stochastyczne równanie różniczkowe dla procesu π. Stąd proces π jest procesem Markowa i co za tym idzie można wyznaczyć jego generator infinitezymalny. W Tw. 3.1. (nazywanym głównym twierdzeniem) pokazana jest równoważność problemu optymalizacyjnego z problemem Stefana i przydałby się tu komentarz dlaczego dowód Shiryaev'a dla modelu brownowskiego nie może

Z. Michna

być wykorzystany dla skokowej dyfuzji (lub może jest prawie taki sam). Tak więc tak jak poprzednio problem sprowadza się do rozwiązania problemu Stefana i optymalny czas zatrzymania jest czasem przejścia bariery A^* wyznaczonej w problemie Stefana. W następnym podrozdziale rozważane są przykłady, w których rozkładem skoków złożonego procesu Poissona jest dwustronny rozkład wykładniczy. Podobnie jak poprzednio do znalezienia optymalnego czasu zatrzymania zostaje użyta uogólniona statystyka Shiryaev'a-Roberts'a (problem dyskretyzacji i estymacji procesu π). Na uwagę załuguje Tw. 3.2, w którym znajduje się wartość optymalną funkcji z problemu optymalizacyjnego i barierę dla wyznaczenia optymalnego czasu zatrzymania przy powyższych założeniach. W dowodzie tego twierdzenia korzysta się z teorii osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych sprowadzając w nietrywialny sposób równanie z problemu Stefana do pewnego osobliwego równania różniczkowego. W następnym podrozdziale prezentowany jest przykład aplikacyjny tzn. zastosowanie modelu do tablic życia a dokładnie do detekcji zmiany trendu siły umieralności. Autor jasno i zwięźle wyjaśnia sposób kalibracji parametrów modelu. Przedstawione rysunki są czytelne. Ponadto symuluje trajektorie procesu π i prawdopodobieństwo fałszywego alarmu i średniego opóźnienia alarmu.

W rozdziale czwartym następuje znaczne uogólnienie modelu tzn. zakłada się, że procesy wyjściowe (przed i po zmianie dryfu) mają wartości w przestrzeni $\mathbb{R}^d$, moment zmiany dryfu po warunkiem, że jest dodatni, jest zmienną losową o dowolnym ciągłym rozkładzie i ponadto wielkość dryfu jest zmienną losową. Konstruuje się tu odpowiednią przestrzeń probabilistyczną z produktowym σ-ciałem, filtracją i miarą probabilistyczną. Stąd właśnie można wywnioskować, że czas zmiany dryfu jest niezależny od pozostałych składowych procesu X. Natomiast rozkład wielkości skoków zależy od wielkości dryfu co nie zostało uwzględnione potem w żadnym z przykładów. Podobnie jak poprzednio wprowadza się dodatkowe równoważne miary prawdopodobieństwa aby przedstawić proces π w odpowiedniej reprezentacji. Ta cześć bazuje na wynikach z prac Zhitlukhin i Shiryaev [5] i problem optymalizacyjny przyjmuje postać jak w poprzednich rozdziałach. Proces X przed lub po zmianie dryfu jest teraz d-wymiarowym procesem Lévy'ego z komponentą Gaussowską i d-wymiarowym złożonym procesem Poissona. W Tw. 4.1 przy pewnych założaniach i postaci procesu jak wyżej zostaje wyznaczony proces pochodnej Radona-Nikodyma dla odpowiednich miar probabilistycznych (proces przed zmianą dryfu i po zmianie dryfu przy ustalonym dryfie). W dowodzie stosuje się wyniki z pracy Palmowski i Rolski [3]. Następnie zostaje wyznaczony generator infinitezymalny dla procesu π i w głównym twierdzeniu tego rozdziału Tw. 4.2 pokazuje się, że podobnie jak w poprzednich prostszych modelach problem opymalizaycjny jest równoważny problemowi Stefana. Dowód tego twierdzenia przebiega tak samo jak dowód w przypadu jednowymiarowym bez losowej wielkości dryfu (autor tak twierdzi, bo nie jest w całości przedstawiony). Pierwszy przykład jaki jest rozpatrywany to dwuwymiarowy skorelowany proces Wienera bez złożonego procesu Poissona. Rozkład wielkości dryfu przyjmuje rozkład dwupunktowy a czas zmiany dryfu podobnie jak poprzednio ma rozkład wykładniczy po warunkiem, że jest większy od zera. Dla tak określonego modelu zostaje znaleziona optymalna wartość funkcji z problemu optymalizacyjnego w jawnej postaci i podane zostaje równanie pozwalające wyznaczyć barierę potrzebną do

Z. Michna

znalezienia optymalnego czasu zatrzymania. Rozwiązanie to jest prawie takie samo jak w przypadku jednowymiarowym (model Shiryaev'a). W drugim przykładzie dodaje się do dwumiarowego ruchu Browna złożony proces Poissona z wykładniczymi skokami (niezależne wykładnicze zmienne losowe na dwóch współrzędnych) ale wartość zmiany dryfu nie jest już losowa i czas zmiany dryfu ma rozkład wykładniczy pod warunkiem, że jest dodatni. Wtedy skoki procesu X po zmianie dryfu mają też rozkład wykładniczy na komponentach co wynika z założenia w Tw. 4.1. W końcu zostaje wyprowadzona jawna postać generatora infinitezymalnego dla procesu π dla powyższego modelu. Następnie zamiast uogólnionej statystyki Shiryaev'a-Roberts'a zostaje wyprowadzony pewien jej analog, podobnie jak poprzednio pozwalający estymować czas alarmu. W następnym podrozdziale model dwuwymiarowy z procesem Wienera po współrzędnych i dwupunktowym losowym dryfem jest kalibrowany do tablic życia dla kobiet i mężczyzn w Polsce. Dla tablic życia zaczynających się w roku 2000 zostaje wyznaczony moment zmiany dryfu po wcześniejszej kalibracji parametrów modelu. Opisy kalibracji i rysunki są bardzo jasne bez zbędnych komentarzy. Może tylko przydałby się tu głębszy komentarz do stwierdzenia, że model nie jest wydajny jeśli wzięlibyśmy dryfy przeciwnych znaków po współrzędnych bo w założeniach modelu wydaje się, że jest to dozwolone.

Tak więc kończąc podjęta tematyka rozprawy jest bardzo ciekawa ze względu na to, że bazuje na procesach Lévy'ego, które teraz cieszą się bardzo dużym zainteresowaniem probabilistów i praktyków. Literatura rozprawy zawiera 40 pozycji i są to głównie publikacje z najlepszych czasopism probabilistyki stosowanej i modelowania stochastycznego. Ponadto cytowane artykuły są głównie nowymi pozycjami opublikowanymi kilka do kilkunastu lat temu wraz z klasycznymi pracami Shiryaev'a co potwierdza, że temat pracy jest aktualny i cieszący się zainteresowaniem wśród probabilistów. Doktorant cytuje jeden artykuł opublikowany w wysokopunktowanym czasopiśmie Applied Mathematics and Computation [1], którego jest współautorem. Natomiast jest współautorem dwóch publikacji i uczestnikiem i prelegentem ośmiu konferencji. Podanto doktorant prezentuje oryginalne wyniki, które są interesujące z matematycznego punktu widzenia jak również mające zastosowanie w ubezpieczeniach i finansach. Autor wykazał się dużą wiedzą z teorii procesów Lévy'ego i Markowa. Dowody oparte są na odpowiednim wykorzystaniu wzoru Itô, wyznaczaniu generatorów infinitezymalnych dla procesów Markowa i rozwiązaniach osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych. Doktorant korzysta w umiejętny sposób z teorii zamiany miary dla procesów Markowa. Na pochwałę zasługują przykłady numerczne, gdzie doktorant wykazał się dużymi umiejętnościmi aplikacyjnymi i wiedzą ze statystyki. Przykłady na pewno mają wartość praktyczną. Tak więc podsumowując, rozprawa spełnia wymagania stawiane dysertacjom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. Michała Krawca do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Szczegółowe uwagi:

- str. 8, lin. 2 - $\pi_0 = x$;
- str. 8, lin. 5 - zamiast π_t powinno być π_τ;

Z. Michna

- str. 8, rów. (2.10), ostatnia równość - wydaje się, że jest tu potrzebny argument o niezależności;
- str. 9, lin. 1 - wystarczy funkcję f określić na $[0, 1]$;
- str. 11, ostatnia lin. - wzór;
- str. 37, lin. 5-8 - nie jest to jasne;
- str. 41, lin. 10 - reciprocal zamiast inverse;
- str. 49, lin. 10 - zamiast (4.10) powinno być równanie po rów. (4.3).

Z. Michna

Bibliografia

[1] M. Krawiec, Z. Palmowski, L. Płociniczak (2018) Quickest drift change detection in Lévy-type force of mortality model. *Applied Mathematics and Computation* **338**, 432–450.

[2] A. Kyprianou (2006) Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications. Springer Science & Business Media.

[3] Z. Palmowski, T. Rolski (2002) A technique for exponential change of measure for Markov processes. *Bernoulli* **8**(6), 767–785.

[4] A. N. Shiryaev (1961) The problem of the most rapid detection of a disturbance in a stationary process. *Soviet Mathematics Doklady* **2**, 795–799.

[5] M. Zhitlukhin, A. N. Shiryaev (2013) Bayesian disorder problems on filtered probability spaces. *Theory of Probability and Its Applications* **57**(3), 497–511.

Zbigniew Michna

Z. Michna