Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Patrycja Piechaczek

Skrypt z Algebry Liniowej 1

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dr. hab. prof. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2007

Spis treści

Wstęp

Niniejszy skrypt przeznaczony jest dla studentów I roku matematyki uczęszczających na wykład z algebry liniowej 1 w łatwiejszym nurcie A. Został on napisany w oparciu o notatki prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego do tegoż właśnie wykładu. Ma służyć Czytelnikowi w lepszym zrozumieniu pojęć omawianych na wykładach. Zebrane w skrypcie wiadomości są opisane językiem prostym, przystępnym dla studentów, którzy dopiero wchodzą w świat matematycznych definicji, twierdzeń i dowodów. Dodatkowo zawarte w nim przykłady i ćwiczenia wraz z pełnymi rozwiązaniami, a także liczne rysunki, jeszcze lepiej obrazują przytaczane definicje i fakty.

Skrypt obejmuje zagadnienia z geometrii analitycznej i algebry liniowej, lecz ogranicza się tylko do przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Przestrzenie wyższych wymiarów omówione są w skrypcie autorstwa Barbary Szczepańskiej „Skrypt z Algebry Liniowej 2", będącego kontynuacją tego skryptu. Zrozumienie treści niniejszego skryptu może także pomóc w wyrobieniu intuicji analogicznych pojęć w wyższych wymiarach, poznawanych w dalszym toku nauki algebry liniowej.

Pierwsze rozdziały skryptu dotyczą geometrii analitycznej, począwszy od pojęć zupełnie podstawowych, jak układ współrzędnych, czy współrzędne punktu, poprzez rachunek wektorowy, iloczyn skalarny, aż do równań krzywych a także układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi. W kolejnych rozdziałach opisane są przekształcenia płaszczyzny, których badaniem zajmuje się algebra liniowa. W szczególności, osobne rozdziały poświęcone są przekształceniom liniowym oraz afinicznym. Pojęcia związane z przekształceniami liniowymi, tj. macierze oraz wartości i wektory własne, omówione są w dwóch kolejnych rozdziałach. Ostatnią częścią skryptu jest jeszcze jedno zagadnienie związane z płaszczyzną, a mianowicie liczby zespolone i ich geometryczna interpretacja, a także funkcje zespolone odpowiadające przekształceniom płaszczyzny.

Aby ułatwić Czytelnikowi korzystanie ze skryptu, materiał przedstawiony w poszczególnych rozdziałach podzieliłam na podrozdziały, w obrębie których umieszczam numerowane kolejno definicje, twierdzenia, fakty, uwagi i wnioski. Wyróżniam także pewne fragmenty tekstu (będę nazywać je punktami) umieszczając na ich początku nagłówek, również numerowany, informujący Czytelnika czego będą dotyczyły przedstawione niżej rozważania. Wszystkie ważniejsze równania oznaczone są numerami w nawiasach umieszczonymi z prawej strony, natomiast te z nich, które są najistotniejsze wyróżnione są dodatkowo znakami $\diamondsuit$ po obu stronach wzoru. Jeśli w pewnych miejscach korzystam z wcześniej wprowadzonych treści, zaznaczam to poprzez podanie odpowiedniego numeru podrozdziału, punktu, faktu, równania itp. Przykłady i ćwiczenia umieściłam w ramkach, by odróżnić je od pozostałego tekstu. Przykłady stanowią prostą, bezpośrednią ilustrację omawianych w danym miejscu treści, natomiast ćwiczenia są nieco trudniejsze, lub wymagają powiązania kilku informacji.

Mam nadzieję, że skrypt okaże się pomocny dla studentów, a sposób przedstawienia materiału będzie zrozumiały dla Czytelników.

Patrycja Piechaczek

Pragnę podziękować promotorowi profesorowi Świątkowskiemu za poświęcony czas oraz cenne uwagi kształtujące zarówno formę, jak i treść tego skryptu oraz jego poprawność matematyczną.

Rozdział 1

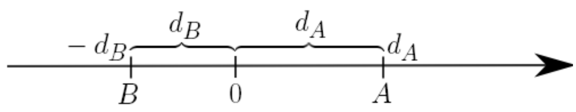
Wiadomości wstępne

1.1 Oś liczbowa

Oś liczbowa jest to prosta, której punkty oznaczone są liczbami rzeczywistymi w następujący sposób:

- wyróżniamy punkt oznaczony liczbą 0;
- wyróżniamy stronę dodatnią (po jednej stronie punktu 0) i ujemną (po drugiej stronie 0);
- punkty po stronie dodatniej oznaczamy liczbami równymi ich odległościom od punktu 0;
- punkty po stronie ujemnej oznaczamy liczbami przeciwnymi do ich odległości od punktu 0;

Tradycyjne, jeśli oś liczbową wyobrażamy sobie jako prostą poziomą, to stronę dodatnią określa się na prawo od punktu 0, tak jak to przedstawia poniższy rysunek. Punkt A leży po stronie dodatniej, więc oznaczamy go liczbą d_A równą odległości A od 0, zaś B leży po stronie ujemnej i oznaczamy go liczbą przeciwną do odległości d_B tego punktu od 0, czyli $-d_B$.



Uwaga 1.1.1. Zauważmy, że każdemu punktowi na osi odpowiada pewna liczba, a każdej liczbie odpowiada dokładnie jeden punkt na osi. Możemy zatem powiedzieć, że liczby rzeczywiste są przyporządkowane punktom na osi liczbowej w sposób wzajemnie jednoznaczny. Tak więc punkt na osi utożsamiamy z liczbą i zamiast mówić, np. "punkt odpowiadający liczbie -3", mówimy po prostu "punkt -3".

Dla danych punktów x i y na osi liczbowej odległość między nimi, jak łatwo zauważyć, wyraża się wzorem:

$$d(x, y) = |x - y|, \tag{1.1.1}$$

gdzie $d(x, y)$ oznacza **odległość między punktami** x i y.

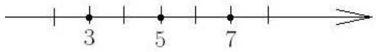
Przykład 1.1.2. Znajdźmy na osi liczbowej punkty oddalone:

a) o 2 od liczby 5;

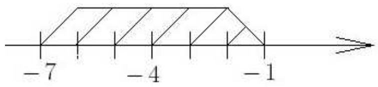
b) o mniej niż 3 od -4;

c) przynajmniej o 2 od liczby $\sqrt{2}$.

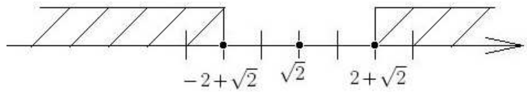
Korzystając ze wzoru (1.1.1) możemy powyższe zadanie zapisać używając równań i nierówności z wartością bezwzględną, a rozwiązanie odczytać z osi liczbowej.

a) $|x-5|=2$ 

stąd $x \in \{3,7\}$;

b) $|x-(-4)|<3$ 

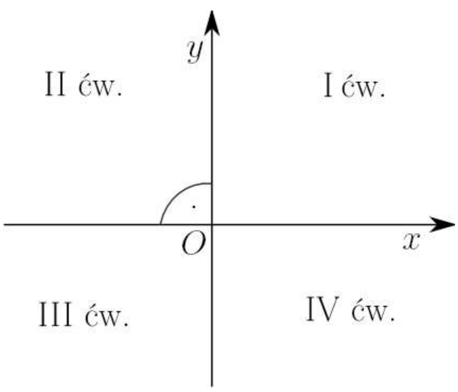
stąd $x \in (-7;-1)$;

c) $|x-\sqrt{2}| \geq 2$, 

stąd $x \in (-\infty; -2+\sqrt{2}\rangle \cup \langle 2+\sqrt{2}; +\infty)$.

1.2 Układ współrzędnych

Mając dane na płaszczyźnie dwie osie liczbowe przecinające się pod kątem prostym w punkcie O otrzymujemy **układ współrzędnych**. Osie układu współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery równe części zwane **ćwiartkami**.



Oznaczenia:

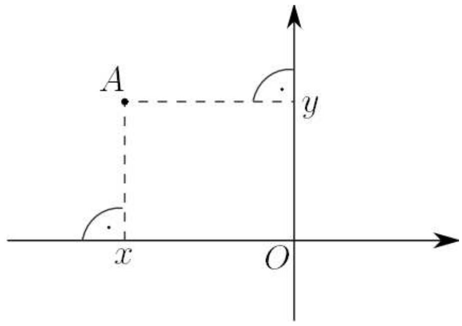
- O - początek układu współrzędnych (punkt przecięcia osi);
- Ox, Oy - osie liczbowe (oś odciętych, oś rzędnych);
- Oxy - układ współrzędnych (płaszczyzna z układem współrzędnych).

Współrzędne punktu A to liczby na osiach odpowiadające rzutom prostokątnym punktu A na osie: pierwsza liczba zwana **odciętą** jest współrzędną na osi Ox, druga–**rzędna** to współrzędna na osi Oy. Współrzędne tworzą uporządkowaną parę:

$$(\text{odcięta, rzędna}) = (x, y).$$

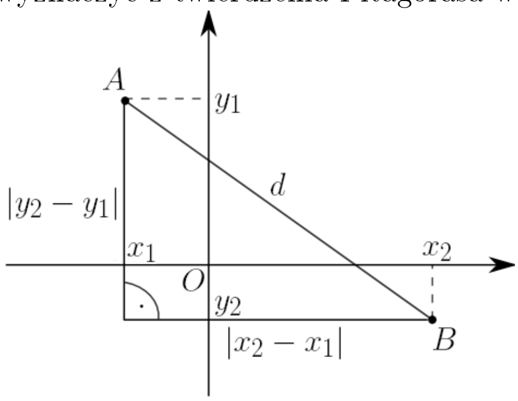
Na rysunku obok zaznaczony jest punkt A i jego współrzędne (x, y). Taki punkt będziemy zapisywać jako $A(x, y)$.

Uwaga 1.2.1. Każdy punkt płaszczyzny Oxy ma dokładnie jedne wspórzędne, a każda uporządkowana para liczb rzeczywistych stanowi współrzędne pewnego punktu. Będziemy zatem mówić krótko, np. "punkt $(-8, 3\sqrt{3})$".



1.2.2. Odległość punktów na płaszczyźnie

Odległość punktu $A(x_1, y_1)$ od punktu $B(x_2, y_2)$, oznaczaną przez $|AB|$, możemy wyznaczyć z twierdzenia Pitagorasa w przedstawiony poniżej sposób.



Szukamy długości $d = |AB|$. Odczytując z rysunku obok długości przyprostokątnych zaznaczonego trójkąta mamy:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2,$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ostatecznie możemy zapisać wzór na odległość dwóch punktów:

$$\Diamond \qquad |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad \Diamond \tag{1.2.1}$$

Ćwiczenie 1.2.3. Znajdź na osi odciętych punkt $P(x, y)$ leżący w odległości 5 od punktu $A(1, 3)$.
ROZWIĄZANIE:
Wiemy, że $|AP| = 5$. Korzystając ze wzoru (1.2.1) dostajemy równość:

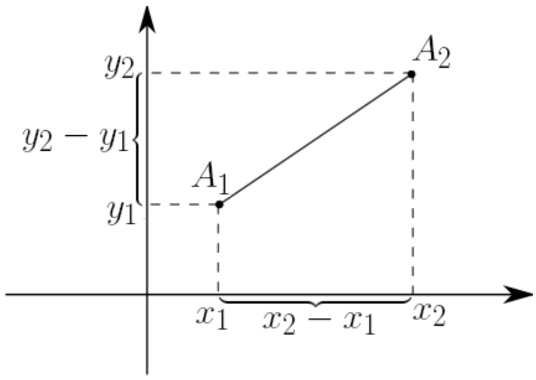
$$|AP| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = 5.$$

Ponieważ P ma leżeć na osi odciętych, więc $y = 0$. Otrzymujemy zatem równanie $(x-1)^2 + 9 = 25$ i dalej obliczając dochodzimy do postaci $x - 1 = \pm 4$. Widzimy więc, że istnieją dwa punkty spełniające warunki zadania: $P_1(-3, 0)$ i $P_2(5, 0)$.

1.3 Współczynnik nachylenia odcinka

Definicja 1.3.1. Dane są punkty $A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_1, y_2)$. **Współczynnikiem nachylenia odcinka** A_1A_2 nazywamy stosunek przyrostu rzędnej do przyrostu odciętej. Zwykle będziemy oznaczali go literą k i nazywali krótko **nachyleniem**:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.3.1}$$



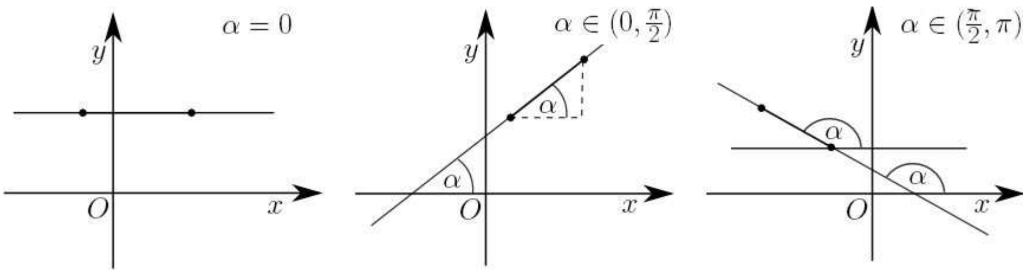
Uwaga 1.3.2.

(a) Współczynnik nachylenia nie zależy od kolejności punktów, bo:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ .$$

(b) Współczynnik nachylenia nie jest zdefiniowany dla odcinka pionowego, gdyż mamy wtedy $x_2 - x_1 = 0$. Dla pozostałych odcinków nachylenie jest zdefiniowane.

(c) Nachylenie jest równe tangensowi kąta α, jaki tworzy dodatnia półoś Ox z prostą zawierającą ten odcinek. Kąt ten jest mierzony w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, począwszy od półosi Ox. Możemy zatem zapisać, że $k = \operatorname{tg} \alpha$.



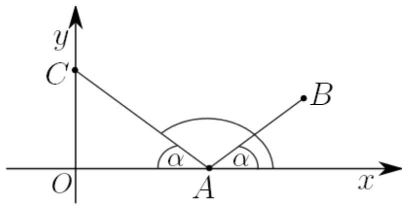
Przykład 1.3.3. Dany jest punkt $A(-3, 4)$. Znajdź współrzędne punktu B leżącego na osi Oy, dla którego współczynnik nachylenia odcinka AB wynosi $-\frac{1}{4}$. Skoro punkt $B(x, y)$ leży na osi Oy, więc $x = 0$. Drugą współrzędną wyliczymy ze wzoru (1.3.1) na współczynnik nachylenia odcinka:

$$k_{AB} = \frac{y - 4}{0 - (-3)} = \frac{y - 4}{3} = -\frac{1}{4}.$$

Stąd mamy $y - 4 = -\frac{3}{4}$, zatem $y = 3\frac{1}{4}$. Ostatecznie otrzymujemy punkt $B(0, 3\frac{1}{4})$.

Ćwiczenie 1.3.4. Promień świetlny wychodzi z punktu $B(7,2)$ i odbija się od osi Ox w punkcie $A(4,0)$ (zgodnie z zasadą, że kąt padania równy jest kątowi odbicia). W jakim punkcie promień przetnie oś Oy?
ROZWIĄZANIE:

Na rysunku obok przedstawiona jest sytuacja z zadania. Chcemy znaleźć współrzędne punktu $C(0,c)$. W tym celu wyznaczmy współczynnik nachylenia odcinka AC, pamiętając, że jest on równy tangensowi odpowiedniego kąta:



$$k_{AC} = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -k_{AB} = -\frac{2-0}{7-4} = -\frac{2}{3}.$$

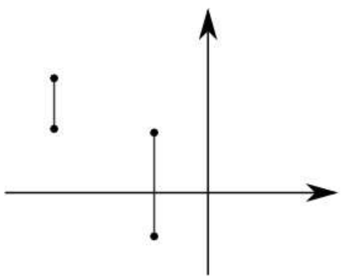
Mamy zatem równość:

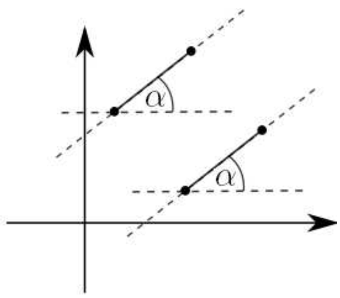
$$k_{AC} = \frac{c-0}{0-4} = -\frac{2}{3},$$

z której wyliczamy brakującą współrzędną $c = \frac{8}{3}$. Szukanym punktem jest $C(0, \frac{8}{3})$.

1.4 Równoległość i prostopadłość odcinków

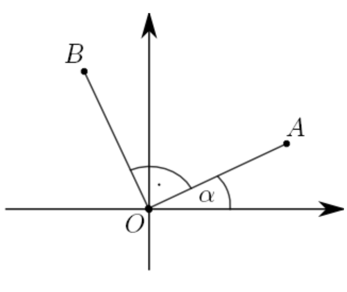
Odcinki AB i CD są **równoległe** dokładnie wtedy, gdy oba są pionowe, lub gdy ich współczynniki nachyleń k_1, k_2 są równe, czyli $k_1 = k_2$.





Odcinki (takie, które nie są ani poziome, ani pionowe) są **prostopadłe** dokładnie wtedy, gdy $k_1 \cdot k_2 = -1$ (inaczej: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$).

Weźmy dla przykładu odcinek OA oraz OB – powstały przez obrót odcinka OA o kąt $\frac{\pi}{2}$ względem początku układu współrzędnych. Odcinki te są prostopadłe. Pokażemy, że zachodzi podany wyżej warunek prostopadłości: $k_{OA} \cdot k_{OB} = -1$. Wyznaczmy współczynniki nachylenia: $k_{OA} = \operatorname{tg}\alpha$ oraz $k_{OB} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Możemy już łatwo pokazać żądaną równość:



$$k_{OA} \cdot k_{OB} = \operatorname{tg}\alpha \cdot (-\operatorname{ctg}\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot (-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}) = -1.$$

Ćwiczenie 1.4.1. Dane są punkty $A(0,1)$, $B(2,0)$, $C(1,-2)$, $D(-1,-1)$. Sprawdź rachunkowo, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.
ROZWIĄZANIE:
Obliczmy najpierw długości boków tego czworokąta:

$$|AB| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5},$$

$$|BC| = \sqrt{(1-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5},$$
$$|CD| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{5},$$
$$|AD| = \sqrt{(-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Wszystkie boki czworokąta są równe, a więc jest to romb. Wystarczy jeszcze pokazać, że sąsiednie boki tego rombu są prostopadłe. Wykorzystamy do tego współczynniki nachylenia boków czworokąta $ABCD$. Wynoszą one:

$$k_{AB} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}, \qquad k_{BC} = \frac{-2-0}{1-2} = 2,$$

$$k_{CD} = \frac{-1+2}{-1-1} = -\frac{1}{2}, \qquad k_{AD} = \frac{-1-1}{-1-0} = 2.$$

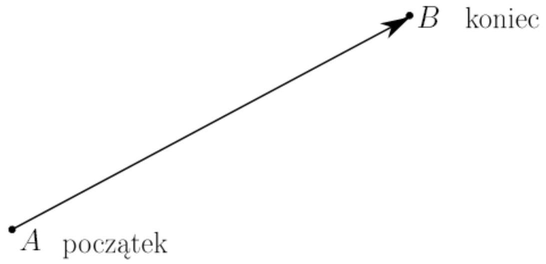
Otrzymaliśmy, że $k_{AB} \cdot k_{BC} = -1$, co oznacza, że $AB \perp BC$. Stąd możemy już wywniosować, że faktycznie czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

Rozdział 2

Wektory na płaszczyźnie

2.1 Wektor i jego współrzędne

Wektor to odcinek, którego końce tworzą uporządkowaną parę punktów, z których pierwszy nazywamy początkiem, drugi zaś końcem wektora.



Zapis $\overrightarrow{AB}$ oznacza wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B. Stosować będziemy także jednoliterowe oznaczenia wektorów, np. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, bądź opuszczając strzałkę nad literą, np. u, v, w.

Wektor, którego początek pokrywa się z jego końcem nazywamy **wektorem zerowym**. Oznaczamy go przez $\vec{0}$, lub 0.

Współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy różnice odpowiednich współrzędnych końca B i początku A tego wektora. Zapisujemy je w nawiasach kwadratowych:

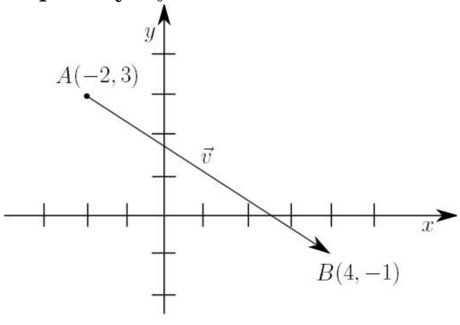
$$\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2], \quad \text{gdzie } A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2).$$

Uwaga 2.1.1. Kolejność jest bardzo ważna: od współrzędnych końca wektora odejmujemy współrzędne początku!

Ogólnie wektor $\vec{v}$ we współrzędnych zapisujemy jako: $\vec{v} = [v_1, v_2]$.

Uwaga 2.1.2. Współrzędne wektora zerowego to $\vec{0} = [0, 0]$.

Przykład 2.1.3. Obliczmy współrzędne wektora $\vec{v}$ zaznaczonego w układzie współrzędnych.



$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = [4 - (-2), -1 - 3] = [6, -4].$$

Ćwiczenie 2.1.4. Znajdź wektor $\vec{w}$ o początku w punkcie $P(-1, 2)$ i o współrzędnych $[2, -3]$.

ROZWIĄZANIE:

Koniec wektora $\vec{w}$ oznaczmy punktem $K(k_1, k_2)$. Współrzędne tego wektora możemy zapisać następująco:

$$\vec{w} = \overrightarrow{PK} = [k_1 - (-1),\ k_2 - 2] = [2, -3].$$

Porównując odpowiednie współrzędne otrzymujemy równania:

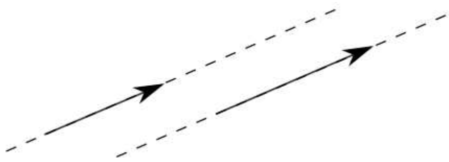
$$k_1 + 1 = 2 \quad \text{oraz} \quad k_2 - 2 = -3.$$

Znaleźliśmy więc współrzędne końca wektora, czyli punkt $K(1, -1)$. Szukany wektor $\vec{w}$ ma początek w punkcie $(-1, 2)$ a koniec w punkcie $(1, -1)$.

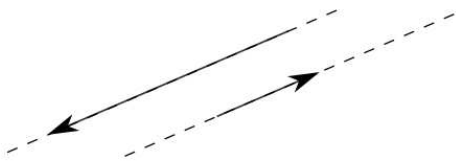
2.2 Geometryczne cechy wektorów

Każdy wektor posiada trzy charakteryzujące go cechy:

- **długość wektora** - długość tworzącego go odcinka, czyli $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$;
- **kierunek wektora** - kierunek prostej, na której leży ten wektor;
- **zwrot** : wektory o danym kierunku mają dwa możliwe zwroty:



zwroty zgodne



zwroty przeciwne

Uwaga 2.2.1. Przyjmuje się, że długość wektora zerowego jest równa zeru, natomiast jego kierunek i zwrot są dowolne.

2.2.2. Wzór na długość wektora

Punkty $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ są odpowiednio początkiem i końcem wektora $\vec{v}$. Ma on zatem następujące współrzędne:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2] = [v_1, v_2].$$

Ponieważ długość wektora jest zwykłą długością odcinka, którego końcami są początek i koniec tego wektora, łatwo otrzymujemy (ze wzoru (1.2.1)), że długość wektora wynosi:

$$|\vec{v}| = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_1)^2} = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2}.$$

Ostatecznie możemy zapisać wzór:

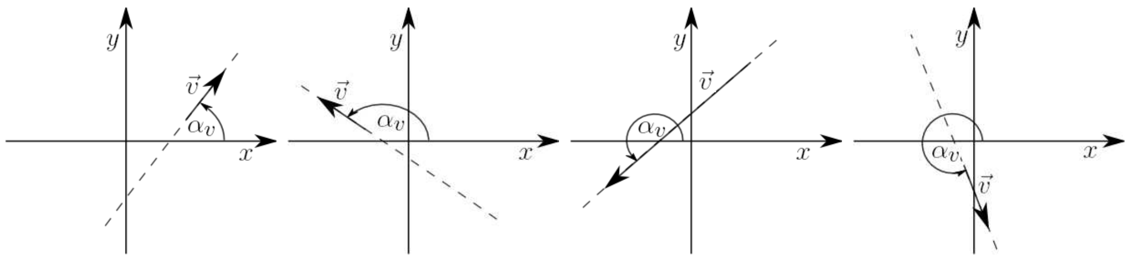
$$\lozenge \qquad |\vec{v}| = \big|[v_1, v_2]\big| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}. \qquad \lozenge \tag{2.2.1}$$

Przykład 2.2.3. Wektor $\vec{u} = [4, -3]$ ma długość $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

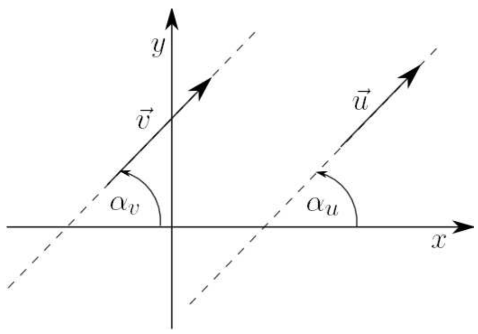
2.2.4. Biegunowa postać wektora

Definicja 2.2.5. Kątem biegunowym α_v wektora $\vec{v}$ nazywamy kąt skierowany pomiędzy dodatnią półosią Ox oraz tą częścią prostej zawierającej $\vec{v}$, która ma zwrot taki jak $\vec{v}$.

Kąt biegunowy jest liczbą z przedziału $[0, 2\pi)$. Rysunki poniżej przedstawiają różne możliwości kierunków i zwrotów wektora oraz odpowiednie kąty biegunowe jakie są wyznaczane w tych przypadkach.

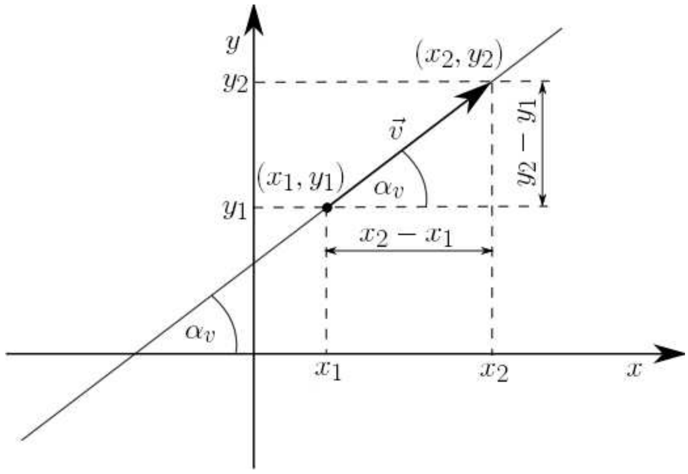


Zauważmy, że kąt biegunowy określa kierunek i zwrot wektora w układzie współrzędnych. Natomiast długość wektora nie jest zależna od kąta biegunowego. Powiedzieć, że dwa wektory mają równe kąty biegunowe, to to samo, co stwierdzić, że mają one jednakowe kierunki i zgodne zwroty.



jednakowe kierunki i zwroty $\iff$ równe kąty biegunowe

Znając kąt biegunowy danego wektora (a zatem jego kierunek i zwrot) oraz dodatkowo także długość tego wektora, możemy określić jego współrzędne. Prowadzi nas to do postaci biegunowej współrzędnych wektora.



Rozważmy przypadek, gdy $\alpha_v \in (0, \frac{\pi}{2})$, jak to przedstawia rysunek obok. Wektor $\vec{v}$ ma współrzędne

$$\vec{v} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1].$$

Wyznaczając cosinus i sinus kąta biegunowego otrzymujemy równości:

$$x_2 - x_1 = |\vec{v}| \cos \alpha_v,$$
$$y_2 - y_1 = |\vec{v}| \sin \alpha_v.$$

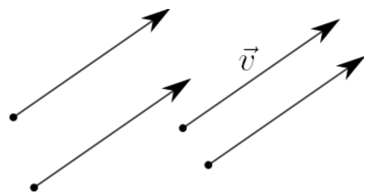
Ostatecznie otrzymujemy **biegunową postać współrzędnych wektora** $\vec{v}$:

$$\Diamond \qquad \vec{v} = [|\vec{v}| \cos \alpha_v, |\vec{v}| \sin \alpha_v]. \qquad \Diamond \tag{2.2.2}$$

Uwaga 2.2.6. Powyższy wzór zachodzi dla dowolnego kąta α. Możemy sprawdzić, że w każdym przypadku obliczenia będą takie same. W tym celu należy zauważyć, że znaki wyrażeń $x_2 - x_1$ i $\cos \alpha$ oraz $y_2 - y_1$ i $\sin \alpha$ są zawsze jednakowe.

2.3 Równość wektorów

Definicja 2.3.1. Dwa wektory nazywamy **równymi**, jeśli mają jednakowe długości, kierunki i zwroty.



Wektory równe danemu wektorowi $\vec{v}$ powstają przez przesunięcia wektora $\vec{v}$ do innych punktów zaczepienia (początków).

Uwaga 2.3.2. Dwa wektory są równe, jeśli mają równe długości i kąty biegunowe.

Twierdzenie 2.3.3. *Równe wektory mają jednakowe współrzędne.*

Dowód. Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą równymi wektorami. Oznacza to, że ich długości oraz kąty biegunowe są równe, tzn. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ i $\alpha_u = \alpha_v$.
Wówczas

$$u_1 = |\vec{u}| \cos \alpha_u = |\vec{v}| \cos \alpha_v = v_1,$$

$$u_2 = |\vec{u}| \sin \alpha_u = |\vec{v}| \sin \alpha_v = v_2.$$

Zatem otrzymaliśmy, że odpowiednie współrzędne obu wektorów są równe:

$$[u_1, u_2] = [v_1, v_2].$$

□

Wektory można w dwojaki sposób traktować: albo biorąc pod uwagę punkt początkowy (punkt zaczepienia), albo nie.

- **Wektor swobodny** to wektor traktowany z dokładnością do relacji równości, czyli z dokładnością do przesunięcia. Określając wektor swobodny musimy znać kierunek, zwrot i długość, natomiast położenie początku wektora nie ma znaczenia. Wektor swobodny można też określić przez podanie jego współrzędnych (bo te nie zależą od położenia początku).

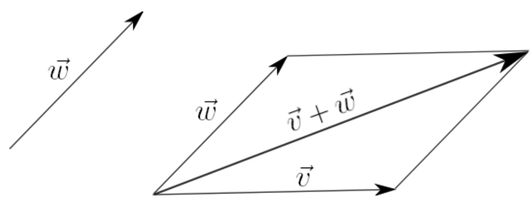
- **Wektor zaczepiony** to wektor, w którym dodatkowo punkt zaczepienia jest ustalony. Zatem do określenia takiego wektora potrzebne jest nie tylko podanie kierunku, zwrotu i długości, ale także punktu początkowego wektora. Wektor zaczepiony można też określić przez podanie punktu początkowego i końcowego.

Definicja z początku drugiego rozdziału jest więc definicją wektora zaczepionego. W dalszej części niniejszego skryptu zajmować się będziemy głównie wektorami swobodnymi, chyba, że wyraźnie będzie mowa o punktach będących końcami wektora.

2.4 Dodawanie wektorów

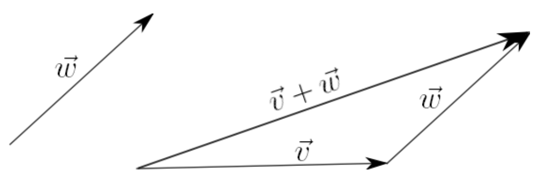
Sumę danych dwóch wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ możemy określić na dwa sposoby, stosując następujące reguły.

1. Reguła równoległoboku.



Wektor $\vec{w}$ przesuwamy tak, by jego początek pokrył się z początkiem wektora $\vec{v}$, a następnie prowadzimy prostą równoległą do $\vec{v}$ przez koniec wektora $\vec{w}$ i równoległą do $\vec{w}$ przez koniec wektora $\vec{v}$. Proste te przecinają się w jednym punkcie będącym końcem szukanego wektora $\vec{v}+\vec{w}$, zaś jego początkiem jest początek wektora $\vec{v}$ (a zarazem początek $\vec{w}$).

2. Reguła przykładania.



Wektor $\vec{w}$ przesuwamy tak, by jego początek pokrył się z końcem wektora $\vec{v}$. Wektor $\vec{v}+\vec{w}$ otrzymujemy łącząc początek wektora $\vec{v}$ z końcem wektora $\vec{w}$, które to punkty są odpowiednio początkiem i końcem szukanego wektora.

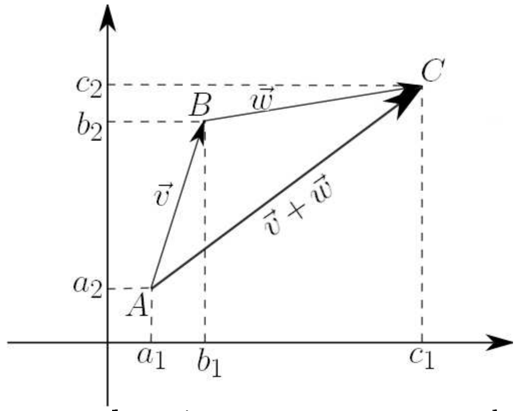
2.4.1. Dodawanie we współrzędnych

Zobaczmy w jaki sposób można przeprowadzić działanie dodawania wektorów posługując się ich współrzędnymi.

Przyjmijmy, że mamy dane wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2] = [v_1, v_2],$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{BC} = [c_1 - b_1, c_2 - b_2] = [w_1, w_2].$$

Znajdźmy współrzędne wektora $\vec{v} + \vec{w}$:
$\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AC} = [c_1 - a_1, c_2 - a_2] =$
$= [c_1 - b_1 + b_1 - a_1, c_2 - b_2 + b_2 - a_2] =$
$= [w_1 + v_1, w_2 + v_2].$



Otrzymaliśmy zatem, że **współrzędne sumy wektorów**, to sumy poszczególnych wspórzędnych tych wektorów:

$$\diamondsuit \qquad [v_1, v_2] + [w_1, w_2] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2]. \qquad \diamondsuit \tag{2.4.1}$$

Ćwiczenie 2.4.2. Jaka jest długość wektora będącego sumą wektorów $\vec{v} = [-8, 3]$ i $\vec{w} = [7, -5]$?
ROZWIĄZANIE:
Wyznaczmy najpierw współrzędne wektora sumy:

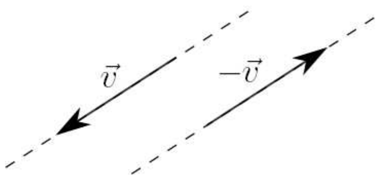
$$\vec{v} + \vec{w} = [-8 + 7,\ 3 + (-5)] = [-1, -2].$$

Długość tego wektora wynosi $\sqrt{5}$, co łatwo obliczyć:

$$|\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

2.5 Wektory przeciwne i odejmowanie wektorów

Definicja 2.5.1. Dwa wektory nazywamy **przeciwnymi**, jeśli mają jednakowe długości i kierunki, lecz przeciwne zwroty.



Wektor przeciwny do wektora $\vec{v}$ oznaczamy przez $-\vec{v}$.

Fakt 2.5.2. *Jeśli* $\vec{v} = [v_1, v_2]$*, to* $-\vec{v} = [-v_1, -v_2]$*.*

Dowód. Jeśli $\vec{v}$ jest wektorem o początku w $A(a_1, a_2)$ i końcu w $B(b_1, b_2)$, to jako wektor przeciwny do niego, czyli o przeciwnym zwrocie, ale tym samym kierunku i tej samej długości można wziąć np. wektor o początku w B i końcu w A. Wówczas mamy natępujące równości:

$$-\vec{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = [a_1 - b_1, a_2 - b_2] = [-(b_1 - a_1), -(b_2 - a_2)] = [-v_1, -v_2].$$

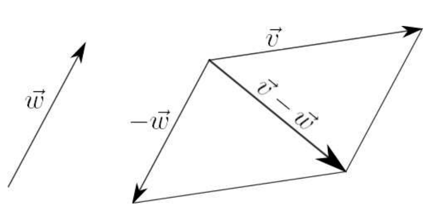
□

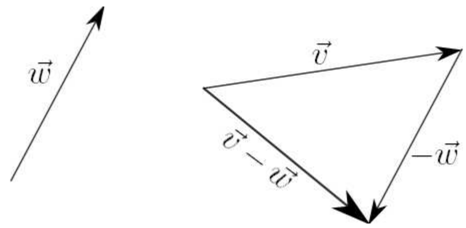
2.5.3. Odejmowanie wektorów

Różnicę wektorów $\vec{v} - \vec{w}$ określamy jako sumę wektora $\vec{v}$ i wektora przeciwnego do $\vec{w}$. Mamy zatem:

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}).$$

Poniższe rysunki przedstawiają geometrycznie odejmowanie wektorów dwoma sposobami, takimi, jak przy dodawaniu wektorów.





Współrzędne różnicy wektorów, to różnice poszczególnych współrzędnych wektorów:

$$\diamondsuit \qquad \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2]. \qquad \diamondsuit \tag{2.5.1}$$

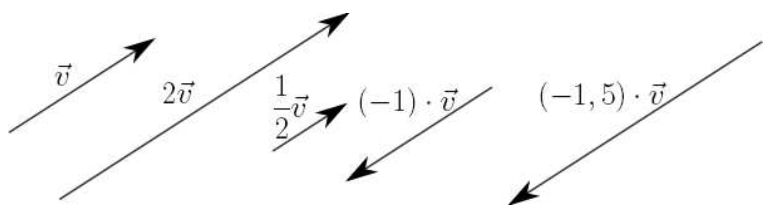
Możemy przeprowadzić prosty rachunek uzasadniający powyższy wzór:

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = [v_1, v_2] + [-w_1, -w_2] = [v_1 + (-w_1), v_2 + (-w_2)] = [v_1 - w_1, v_2 - w_2].$$

2.6 Mnożenie wektora przez liczbę

Mając dany wektor $\vec{v}$ i liczbę rzeczywistą t, możemy określić iloczyn $t \cdot \vec{v}$.

Definicja 2.6.1. Iloczynem wektora $\vec{v}$ **przez liczbę rzeczywistą** t (zwaną też skalarem) nazywamy wektor o takim samym kierunku, jaki ma wektor $\vec{v}$, długości równej $|t| \cdot |\vec{v}|$ oraz zwrocie zgodnym z $\vec{v}$, gdy $t > 0$, lub przeciwnym, gdy $t < 0$. Natomiast iloczyn dowolnego wektora przez liczbę $t = 0$ jest wektorem zerowym.



2.6.2. Współrzędne wektora $t\vec{v}$

Współrzędne wektora $t\vec{v}$ wyznaczymy korzystając z postaci biegunowej.
Niech α_v, α_{tv} będą odpowiednio kątami biegunowymi wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2]$ i $t\vec{v}$. Rozważmy trzy przypadki, w zależności od liczby t:

1. Jeśli $t > 0$, wówczas $\vec{v}$ i $t\vec{v}$ mają zgodne zwroty, więc $\alpha_v = \alpha_{tv}$. Ponadto $|t\vec{v}| = |t| \cdot |\vec{v}| = t \cdot |\vec{v}|$. Mamy zatem
$$\begin{aligned} t \cdot \vec{v} &= [|t\vec{v}| \cos \alpha_{tv}, |t\vec{v}| \sin \alpha_{tv}] = \\ &= [t \cdot |\vec{v}| \cos \alpha_v, t \cdot |\vec{v}| \sin \alpha_v] = [t \cdot v_1, t \cdot v_2]. \end{aligned}$$

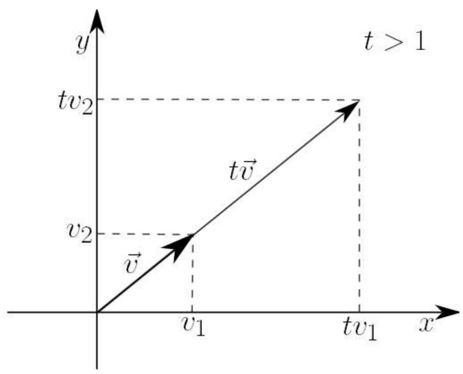
2. Jeśli $t < 0$, wówczas zwroty $\vec{v}$ i $t\vec{v}$ są przeciwne, czyli $\alpha_{tv} = \alpha_v + \pi$. Ponadto $|t\vec{v}| = |t| \cdot |\vec{v}| = -t \cdot |\vec{v}|$. Zatem
$$\begin{aligned} t \cdot \vec{v} &= [|t\vec{v}| \cos \alpha_{tv}, |t\vec{v}| \sin \alpha_{tv}] = [-t|\vec{v}| \cos(\alpha_v + \pi), -t|\vec{v}| \sin(\alpha_v + \pi)] = \\ &= [t \cdot |\vec{v}| \cos \alpha_v, t \cdot |\vec{v}| \sin \alpha_v] = [t \cdot v_1, t \cdot v_2]. \end{aligned}$$

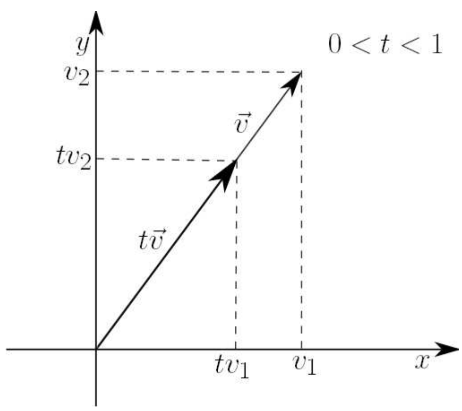
3. W przypadku $t = 0$ definicja mówi, że iloczyn dowolnego wektora przez 0 jest wektorem zerowym. Możemy to zapisać w następujący sposób: $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$, czyli $0 \cdot [v_1, v_2] = [0, 0] = [0 \cdot v_1, 0 \cdot v_2]$.

We wszystkich przypadkach otrzymaliśmy ten sam sposób na obliczenie współrzędnych iloczynu wektora $\vec{v}$ przez liczbę t: należy obie współrzędne wektora pomnożyć przez tę liczbę. Możemy zapisać to wzorem:

$$\Diamond \qquad t \cdot \vec{v} = t[v_1, v_2] = [tv_1, tv_2]. \qquad \Diamond \tag{2.6.1}$$

Poniższe rysunki przedstawiają iloczyn wektora $\vec{v}$ przez dodatnią liczbę t. Zauważmy, że w zależności, czy t jest większe, czy mniejsze od 1, długość wektora się odpowiednio zwiększa, bądź zmniejsza.





Przykład 2.6.3. Obliczmy współrzędne iloczynu wektora $\vec{v} = [-\frac{1}{2}, 3]$ przez -4. Mamy:
$$-4\vec{v} = -4\left[-\frac{1}{2}, 3\right] = \left[-4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), -4 \cdot 3\right] = [2, -12].$$

2.7 Własności działań na wektorach

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych t i s zachodzą następujące własności:

(1) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ (przemienność dodawania),

(2) $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$ (łączność dodawania),

(3) $(t + s) \cdot \vec{v} = t\vec{v} + s\vec{v}$ (rozdzielność mnożenia wektora względem sumy liczb),

(4) $t(\vec{v}+\vec{w}) = t\vec{v}+t\vec{w}$ (rozdzielność mnożenia liczby względem sumy wektorów),

(5) $t(s\vec{v}) = (ts)\vec{v}$ (łączność mnożenia skalarów),

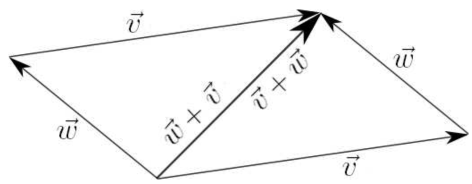
(6) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$, $t \cdot \vec{0} = \vec{0}$,

(7) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Każdą z powyższych własności można łatwo uzasadnić geometrycznie (z definicji), lub algebraicznie (we współrzędnych). Przykładowo podamy uzasadnienie (1) i (7), pozostałe pomijając.

Dowód.

(1) – geometrycznie: własność ta wynika wprost z definicji, suma wektorów nie zależy od porządku składników.



– algebraicznie: współrzędne wektorów są następujące: $\vec{v} = [v_1, v_2]$, $\vec{w} = [w_1, w_2]$. Własność (1) wynika z przemienności dodawania liczb:

$$\vec{v} + \vec{w} = [v_1 + w_1, v_2 + w_2] = [w_1 + v_1, w_2 + v_2] = \vec{w} + \vec{v}.$$

(7) – geometrycznie: $1 \cdot \vec{v}$ jest wektorem o tej samej długości co $\vec{v}$ oraz tym samym kierunku i zwrocie, a więc wektor ten jest równy wektorowi $\vec{v}$.

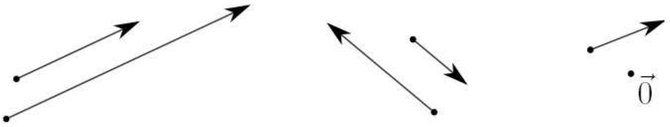
– algebraicznie: wektor $\vec{v}$ ma współrzędne $[v_1, v_2]$, zatem

$$1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot [v_1, v_2] = [1 \cdot v_1, 1 \cdot v_2] = [v_1, v_2] = \vec{v}.$$

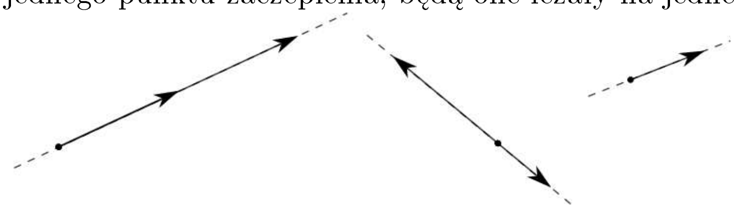
□

2.8 Wektory współliniowe i niewspółliniowe

Poniższy rysunek przedstawia trzy pary wektorów.



Obydwa wektory, spośród każdej z par, mają te same kierunki. Jeśli teraz przesuniemy je do jednego punktu zaczepienia, będą one leżały na jednej prostej.



Taką własność w algebrze liniowej nazywamy **liniową zależnością** pary wektorów. Możemy także powiedzieć o tych wektorach, że są współliniowe.

Definicja 2.8.1. Dwa wektory nazywamy **współliniowymi**, jeśli mają jednakowe kierunki (są równoległe), lub jeśli choć jeden z nich jest wektorem zerowym.

Pojęcie **liniowej niezależności**, czy niewspółliniowości pary wektorów jest przeciwieństwem współliniowości.

Definicja 2.8.2. Dwa wektory są **niewspółliniowe**, jeśli mają różne kierunki.

Twierdzenie 2.8.3. *Jeśli wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są współliniowe, to jeden z nich jest iloczynem drugiego przez pewna liczbę rzeczywistą.*

Dowód. Jeśli oba wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są zerowe, to dla dowolnej liczby t spełniona jest teza $\vec{v} = t \cdot \vec{w}$, gdyż wektor zerowy pomnożony przez dowolną liczbę, jest wektorem zerowym.

W przypadku, gdy tylko jeden z wektorów jest zerowy (przyjmijmy, że $\vec{v} = \vec{0}$) dowód jest również oczywisty i wynika z poznanych wcześniej własności, mamy bowiem: $\vec{v} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{w}$.

Zajmijmy się zatem pozostałym przypadkiem, czyli dla $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $\vec{w} \neq \vec{0}$. Rozważmy dwa podprzypadki:

- $\vec{v}$ i $\vec{w}$ mają zgodne zwroty.
  Niech $t = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|}$. Pokażemy, że $\vec{v} = t \cdot \vec{w}$. Wektory $\vec{v}$ i $t\vec{w}$ mają te same kierunki i zwroty. Ich długości także są równe, bo:
  $$|t\vec{w}| = |t| \cdot |\vec{w}| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|} \cdot |\vec{w}| = |\vec{v}|.$$
  Zatem te wektory są równe, czyli $\vec{v} = t \cdot \vec{w}$.

- $\vec{v}$ i $\vec{w}$ mają przeciwne zwroty.
  Niech teraz $t = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|}$. Wówczas mamy:
  $$|t\vec{w}| = |t| \cdot |\vec{w}| = \left|-\frac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|}\right| \cdot |\vec{w}| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|} \cdot |\vec{w}| = |\vec{v}|.$$

Otrzymaliśmy, ze wektory $\vec{v}$ i $t\vec{w}$ są równej długości. Wiemy też, że mają jednakowe kierunki i zgodne zwroty (bo wektor $\vec{w}$ o zwrocie przeciwnym do $\vec{v}$ mnożymy przez liczbę $t < 0$). Zatem zachodzi równość $\vec{v} = t \cdot \vec{w}$.

□

Uwaga 2.8.4. Algebraiczne określenie *liniowa zależność* oznaczające współliniowość dotyczy właśnie równości $\vec{v} = t \cdot \vec{w}$.

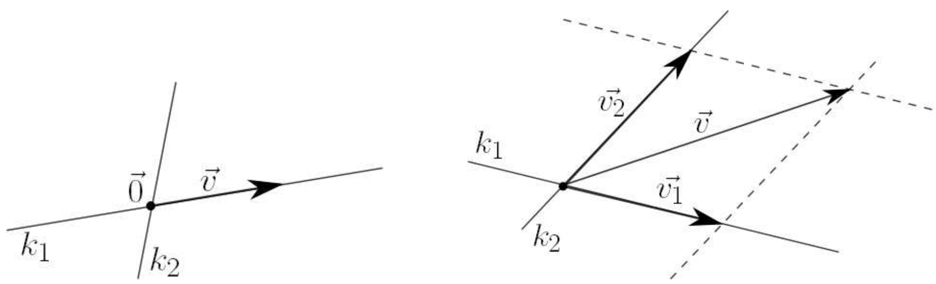
Uwaga 2.8.5. Jeśli wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są niewspółliniowe, to żaden z nich nie jest równy iloczynowi drugiego przez jakąkolwiek liczbę rzeczywistą.

2.9 Rozkład wektora względem dwóch różnych kierunków

Mając dane dwa różne kierunki k_1 i k_2 możemy przedstawić dowolny wektor $\vec{v}$, jako sumę dwóch wektorów o kierunkach k_1 i k_2. Takie przedstawienie $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, gdzie $\vec{v_1}$ ma kierunek k_1, a $\vec{v_2}$ kierunek k_2, nazywamy **rozkładem wektora** względem tych kierunków. Wektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ nazywamy **składowymi**.

Fakt 2.9.1. *Każdy wektor $\vec{v}$ można rozłożyć względem zadanych dwóch kierunków k_1, k_2. Rozkład taki jest jednoznaczny (można go dokonać tylko na jeden sposób).*

Dowód. Jeśli $\vec{v}$ ma jeden z kierunków k_1 lub k_2, to rozkład ma postać $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$, gdzie $\vec{0}$ traktujemy jako składową w drugim kierunku. Tę sytuację przedstawia poniższy rysunek po lewej.



Jeśli $\vec{v}$ nie jest równoległy do żadnego z kierunków, to sposób tworzenia rozkładu przedstawia rysunek powyżej z prawej strony.

Pokazaliśmy zatem, że dla każdego wektora taki rozkład istnieje. Należy jeszcze udowodnić, że jest on jedyny. W tym celu wykażemy, że jeśli istnieją dwa rozkłady, to są one sobie równe.

Niech $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_1}' + \vec{v_2}'$, gdzie $\vec{v_1}, \vec{v_1}'$ mają kierunek k_1, a $\vec{v_2}, \vec{v_2}'$ kierunek k_2. Wówczas $\vec{v_1} - \vec{v_1}' = \vec{v_2}' - \vec{v_2}$ i wektor ten ma zarówno kierunek k_1 (bo $\vec{v_1} - \vec{v_1}'$ ma kierunek k_1), jak i kierunek k_2 (wektor $\vec{v_2}' - \vec{v_2}$ ma taki kierunek). Jedyny wektor, który ma więcej niż jeden kierunek to wektor zerowy, więc otrzymujemy równość:

$$\vec{v_1} - \vec{v_1}' = \vec{v_2}' - \vec{v_2} = 0, \text{ stąd } \vec{v_1} = \vec{v_1}' \text{ oraz } \vec{v_2} = \vec{v_2}'.$$

Otrzymaliśmy zatem, że te dwa rozkłady muszą być jednakowe. □

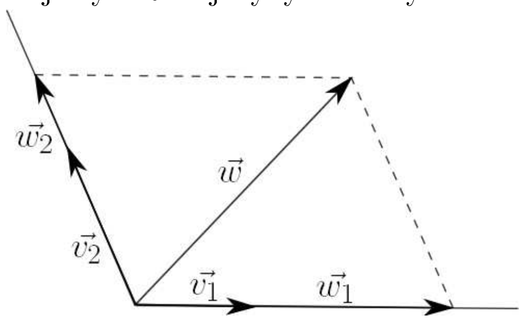
2.10 Rozkład wektora względem pary liniowo niezależnych wektorów

Definicja 2.10.1. **Kombinacją liniową** wektorów $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ nazywamy wyrażenie postaci $t_1 \cdot \vec{v_1} + t_2 \cdot \vec{v_2}$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Przedstawienie wektora $\vec{w}$ jako kombinacji liniowej niewspółliniowych wektorów $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ nazywamy **rozkładem wektora względem pary liniowo niezależnych wektorów.** Liczby t_1 i t_2 nazywamy **współczynnikami kombinacji liniowej** (albo współczynnikami rozkładu). Z faktu o istnieniu jednoznacznego rozkładu wektora względem dwóch kierunków wynika bezpośrednio następujące stwierdzenie.

Fakt 2.10.2. *Każdy wektor rozkłada się jednoznacznie względem pary liniowo niezależnych wektorów.*

Dowód. Wektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ niech będą liniowo niezależne (niewspółliniowe). Wektory $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ są jednoznacznie wyznaczonymi (z Faktu 2.9.1) składowymi rozkładu wektora $\vec{w}$ względem kierunków wektorów $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$, tzn. $\vec{w} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$. Wektory $\vec{w_1}$ i $\vec{v_1}$ są liniowo zależne, przy czym $\vec{v_1}$ jest niezerowy, dlatego $\vec{w_1}$ jest iloczynem $\vec{v_1}$ przez pewną liczbę t_1, czyli $\vec{w_1} = t_1 \cdot \vec{v_1}$. Podobnie dla wektorów $\vec{w_2}$ i $\vec{v_2}$ mamy, że $\vec{w_2} = t_2 \cdot \vec{v_2}$. Otrzymujemy zatem jedyny możliwy rozkład w kombinację liniową wektora $\vec{w}$:

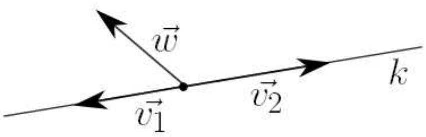


$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} = \vec{w_1} + \vec{w_2} \\ \vec{w_1} = t_1 \cdot \vec{v_1} \\ \vec{w_2} = t_2 \cdot \vec{v_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{w} = t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2}.$$

□

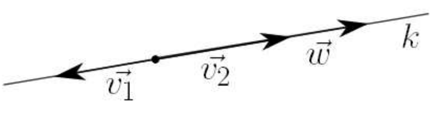
Uwaga 2.10.3. Jeśli wektory $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ są liniowo zależne (czyli mające ten sam kierunek k), to rozkład wektora $\vec{w}$ względem nich:

- nie istnieje, gdy $\vec{w}$ ma kierunek różny od kierunku k.



Wszystkie kombinacje $t\vec{v_1} + s\vec{v_2}$ mają kierunek k, a więc żadna z nich nie może być równa $\vec{w}$.

- jest niejednoznaczny, gdy $\vec{w}$ ma kierunek k.



Dla dowolnej liczby t wektor $t\vec{v_1}$ ma kierunek k i możemy dobrać takie s, że $\vec{w} - t\vec{v_1} = s\vec{v_2}$.

Wtedy $\vec{w} = t\vec{v_1} + s\vec{v_2}$, a ponieważ t mogliśmy wybrać na nieskończenie wiele sposobów, więc takich kombinacji liniowych jest nieskończenie wiele.

Poniższe ćwiczenie pokazuje, że rozkładu w kombinację liniową można dokonać metodami rachunkowymi.

Ćwiczenie 2.10.4. Rozłóż wektor $\vec{w} = [-4, -5]$ względem wektorów $\vec{v_1} = [-1, 2]$ i $\vec{v_2} = [0, -1]$.
ROZWIĄZANIE:
Zauważmy najpierw, że wektory $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ są liniowo niezależne, bo żaden z nich nie jest iloczynem drugiego przez żadną liczbę. Możemy zatem znaleźć kombinację liniową $\vec{w} = t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2}$. Podstawiając współrzędne danych wektorów wyliczymy współczynniki rozkładu:

$$[-4, -5] = t_1[-1, 2] + t_2[0, -1] = [-t_1, 2t_1] + [0, -t_2] = [-t_1, 2t_1 - t_2].$$

Porównując poszczególne współrzędne mamy:

$$-4 = -t_1 \;\Rightarrow\; t_1 = 4$$

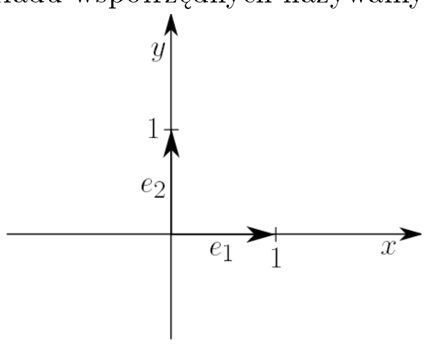
$$-5 = 2t_1 - t_2 \;\Rightarrow\; -5 = 8 - t_2 \;\Rightarrow\; t_2 = 13.$$

Ostatecznie możemy zapisać szukany rozkład:

$$[-4, -5] = 4 \cdot [-1, 2] + 13 \cdot [0, -1].$$

2.11 Wersory

Wektory jednostkowe (tzn. o długości 1) o kierunkach i zwrotach takich, jak osie układu współrzędnych nazywamy **wersorami**.



Oznaczenia wersorów:

$\vec{e_1}$ – wersor związany z osią Ox,
$\vec{e_2}$ – wersor związany z osią Oy.

Można z łatwością zauważyć, że współrzędne wersorów to:

$$\vec{e_1} = [1, 0] \quad \text{oraz} \quad \vec{e_2} = [0, 1].$$

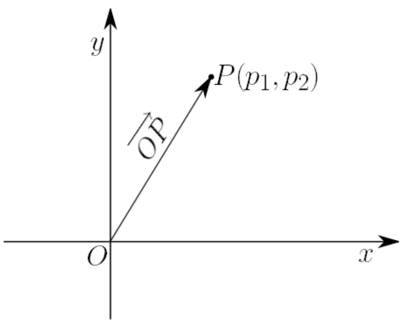
Wersory są liniowo niezależnymi wektorami, a więc dla dowolnego wektora $\vec{v}$ możemy wyznaczyć jednoznacznie jego **rozkład względem wersorów**. Rozkład ten wygląda następująco:

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [v_1, 0] + [0, v_2] = v_1[1, 0] + v_2[0, 1] = v_1 \cdot \vec{e_1} + v_2 \cdot \vec{e_2}.$$

Uwaga 2.11.1. Współczynniki rozkładu wektora względem wersorów są równe współrzędnym tego wektora.

2.12 Wektor wodzący

Definicja 2.12.1. **Wektor wodzący** punktu P to wektor $\overrightarrow{OP}$, gdzie O jest początkiem układu współrzędnych.



Wektor wodzący punktu P ma takie same współrzędne jak ten punkt. Jeśli $P(p_1, p_2)$, to

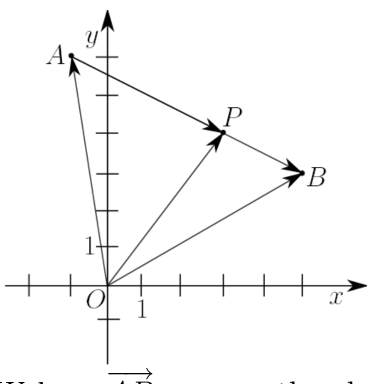
$$\overrightarrow{OP} = [p_1 - 0, p_2 - 0] = [p_1, p_2].$$

Uwaga 2.12.2. Każdemu punktowi płaszczyny odpowiada dokładnie jeden wektor wodzący, a każdy wektor o początku w punkcie O wyznacza dokładnie jeden punkt płaszczyzny będący końcem tego wektora.

Pojęcie wektora wodzącego przydaje się w wielu zadaniach. Przykładowe zastosowanie pokazane jest w poniżej przedstawionym zagadnieniu podziału odcinka.

Ćwiczenie 2.12.3. Mając dane punkty $A(-1, 6)$ i $B(5, 3)$ znajdź współrzędne punktu P podziału odcinka w stosunku $2 : 1$.

ROZWIĄZANIE:



Aby wyznaczyć współrzędne punktu P znajdziemy współrzędne wektora wodzącego $\overrightarrow{OP}$, którym są one równe. Zauważmy, że

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}.$$

Wektor wodzący punktu A ma oczywiście współrzędne $\overrightarrow{OA} = [-1, 6]$. Natomiast współrzędne wektora $\overrightarrow{AP}$ obliczymy z wynikającej z treści zadania równości:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne: $[5 + 1, 3 - 6] = [6, -3]$, a więc $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \cdot [6, -3] =$ $= [4, -2]$. Zatem możemy już podstawić obliczone współrzędne do początkowego równania. Otrzymujemy, że

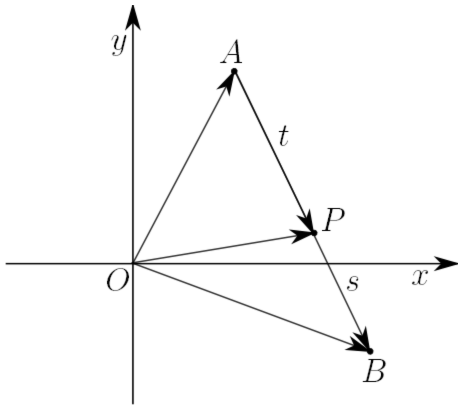
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = [-1, 6] + [4, -2] = [3, 4].$$

Zatem szukanym punktem podziału jest $P(3, 4)$.

Ogólnie możemy powiedzieć, że **punkt podziału odcinka** AB **w stosunku** $t : s$, to taki punkt wewnętrzny P odcinka AB, dla którego zachodzi proporcja $|AP| : |PB| = t : s$.

2.12.4. Wzór na punkt podziału

Mając dane końce odcinka $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i stosunek podziału $t : s$ odcinka AB, znajdziemy punkt podziału $P(p_1, p_2)$. Postępować będziemy podobnie jak w Ćwiczeniu 2.12.3. Aby znaleźć wektor wodzący $\overrightarrow{OP}$ skorzystamy z równości $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$. Zauważmy, że $\overrightarrow{AP} = \frac{t}{t+s} \cdot \overrightarrow{AB}$, natomiast $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Zatem dostajemy, że



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{t}{t+s} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{t}{t+s}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{s}{t+s}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{t+s}\overrightarrow{OB}.$$

Otrzymaliśmy więc wzór na punkt podziału odcinka AB w stosunku $t : s$ w postaci wektorowej:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{s}{t+s}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{t+s}\overrightarrow{OB}. \tag{2.12.1}$$

Możemy także zapisać ten wzór we współrzędnych:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{s}{t+s}a_1 + \frac{t}{t+s}b_1 \\ p_2 = \frac{s}{t+s}a_2 + \frac{t}{t+s}b_2 \end{cases}. \tag{2.12.2}$$

Powyższy wzór łatwo otrzymujemy z podstawienia odpowiednich współrzędnych we wzorze (2.12.1):

$$[p_1, p_2] = \frac{s}{t+s}[a_1, a_2] + \frac{t}{t+s}[b_1, b_2] = \left[\frac{s}{t+s} \cdot a_1 + \frac{t}{t+s} \cdot b_1, \frac{s}{t+s} \cdot a_2 + \frac{t}{t+s} \cdot b_2\right].$$

Uwaga 2.12.5. Jak wiemy, wektory wodzące danych punktów mają takie same współrzędne jak te punkty. Przyjmuje się skrótowy zapis: zamiast $\overrightarrow{OP}$ piszemy $\overrightarrow{P}$ lub nawet P. Wobec tego wzór (2.12.1) możemy zapisać również następująco:

$$\overrightarrow{P} = \frac{s}{t+s}\overrightarrow{A} + \frac{t}{t+s}\overrightarrow{B}.$$

Fakt 2.12.6. *Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.*

Dowód. Fakt ten wynika ze wzoru na punkt podziału odcinka, gdyż środek odcinka jest jego szczególnym przypadkiem, gdzie stosunek podziału wynosi $1 : 1$. Niech $P(p_1, p_2)$ będzie środkiem odcinka AB, gdzie $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$. Mamy wtedy:

$$\overrightarrow{P} = \frac{1}{1+1}\overrightarrow{A} + \frac{1}{1+1}\overrightarrow{B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B}.$$

Możemy to oczywiście zapisać we współrzędnych, co kończy dowód tego faktu:

$$[p_1, p_2] = \left[\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1,\ \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_2\right] = \left[\frac{a_1 + b_1}{2},\ \frac{a_2 + b_2}{2}\right].$$

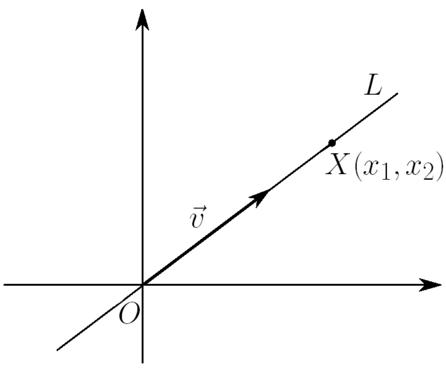
□

2.13 Równanie parametryczne prostej

W języku wektorów możemy zapisać dowolną prostą z płaszczyzny. Zacznijmy jednak od prostszego przypadku, gdy prosta przechodzi przez punkt $(0,0)$.

2.13.1. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych

Dla prostej L o kierunku niezerowego wektora $\vec{v} = [v_1, v_2]$ i przechodzącej przez $(0,0)$ oraz dla dowolnego punktu X z tej prostej mamy, że wektor wodzący punktu X jest iloczynem wektora $\vec{v}$ przez pewną liczbę rzeczywistą t.



Możemy zatem zapisać równość $\overrightarrow{OX} = t \cdot \vec{v}$. Wstawiając współrzędne występujących w tej równości wektorów dostajemy:

$$[x_1, x_2] = t[v_1, v_2] = [tv_1, tv_2].$$

Otrzymane równanie

$$\Diamond \qquad [x_1, x_2] = t \cdot [v_1, v_2] \qquad \Diamond \tag{2.13.1}$$

będziemy nazywać **równaniem parametrycznym prostej** L przechodzącej przez $(0,0)$.

To samo równanie możemy zapisać też we współrzędnych:

$$\Diamond \qquad \begin{cases} x_1 = tv_1 \\ x_2 = tv_2 \end{cases} . \qquad \Diamond \tag{2.13.2}$$

W takim równaniu występuje parametr t, za który można wstawić dowolne liczby rzeczywiste. Natomiast v_1 i v_2 to konkretne współrzędne ustalonego wektora $\vec{v}$, więc są one dane. Niewiadomymi w tym równaniu są x_1 i x_2, które jednak dla poszczególnych wartości parametru t można wyliczyć i dostać współrzędne (x_1, x_2) punktu X. Podstawiając za t kolejne liczby rzeczywiste otrzymamy wszystkie punkty prostej L.

Przykład 2.13.2. Prosta L dana jest równaniem $\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = -4t \end{cases}$. Znajdźmy współrzędne kilku punktów tej prostej. Sprawdźmy też, czy $A(-3,-2)$ należy do L?
Podstawmy za parametr t kolejno kilka liczb i obliczmy współrzędne punktów:

$$\begin{array}{lll} \text{dla} & t = -2 & (x_1, x_2) = (3 \cdot (-2), -4 \cdot (-2)) = (-6, 8); \\ \text{dla} & t = 1 & (x_1, x_2) = (3 \cdot 1, -4 \cdot 1) = (3, -4); \\ \text{dla} & t = \frac{1}{12} & (x_1, x_2) = (3 \cdot \frac{1}{12}, -4 \cdot \frac{1}{12}) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}). \end{array}$$

Otrzymane punkty spełniają równanie prostej L zatem do niej należą. Jeśli punkt A też leży na tej prostej, to dla pewnego t muszą być spełnione oba równania:

$$3 \cdot t = -3 \quad \text{oraz} \quad -4 \cdot t = -2.$$

Dostajemy z nich, że $t = -1$ i $t = \frac{1}{2}$, co jednocześnie nie może zachodzić, więc A nie należy do prostej L.

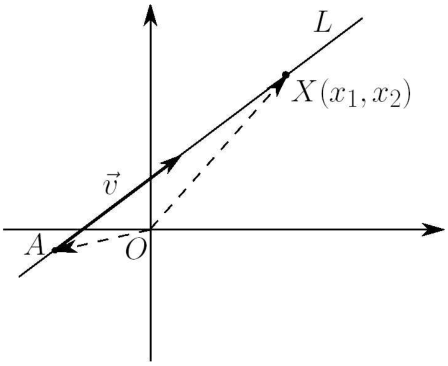
2.13.3. Prosta nie przechodząca przez początek układu współrzędnych

W przypadku prostej L nie przechodzącej przez $(0,0)$, natomiast przechodzącej przez punkt $A(a_1, a_2)$ i równoległej do niezerowego wektora $\vec{v} = [v_1, v_2]$ mamy następujące równości:

$$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{v}$$

dla pewnego t rzeczywistego, oraz

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX},$$



gdzie X jest dowolnym punktem leżącym na prostej L. Wstawiając do drugiego równania pierwszą równość otrzymujemy:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}.$$

Stąd mamy już **postać wektorową równania parametrycznego prostej** L:

$$[x_1, x_2] = [a_1, a_2] + t[v_1, v_2] = [a_1 + tv_1, a_2 + tv_2],$$

co skrótowo możemy zapisać jako $\vec{X} = \vec{A} + t\vec{v}$, lub po prostu $A + tv$. Możemy również otrzymać **równanie parametryczne prostej we współrzędnych**:

$$\Diamond \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \end{cases} . \qquad \Diamond \tag{2.13.3}$$

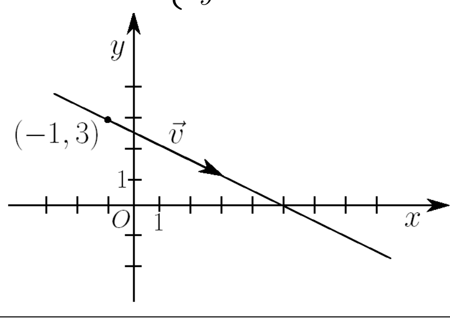
Skrótowy zapis we współrzędnych $(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2)$ także będzie oznaczał prostą.

Uwaga 2.13.4. Każde równanie postaci (2.13.3) dla dowolnych współczynników a_1, a_2, v_1, v_2, takich że $[v_1, v_2] \neq [0,0]$, jest parametrycznym przedstawieniem pewnej prostej.

Przykład 2.13.5. Narysujmy prostą zadaną równaniem: $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$.

Postać wektorowa tego równania to

$$X = [-1, 3] + t[4, -2].$$



Zatem szukana prosta przechodzi przez punkt $(-1, 3)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = [4, -2]$.

Do opisu prostych przydatne są poniżej zdefiniowane pojęcia.

Definicja 2.13.6. Punkt $A(a_1, a_2)$ nazywamy **punktem początkowym prostej** zadanej równaniem (2.13.3).

Definicja 2.13.7. Wektor $\vec{v}[v_1, v_2]$ nazywamy **wektorem kierunkowym prostej** zadanej równaniem (2.13.3).

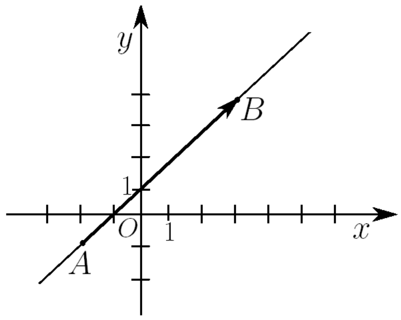
Dla utrwalenia pojęcia równania parametrycznego prostej przeprowadźmy kilka ćwiczeń.

Ćwiczenie 2.13.8. Napisz równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $A(-2,-1)$ i $B(3,4)$.

Rozwiązanie:

Punkt A traktujemy jako punkt początkowy szukanej prostej, natomiast $\overrightarrow{AB}$ jako wektor kierunkowy. Wiemy, że $\overrightarrow{AB} = [3-(-2), 4-(-1)] = [5,5]$, zatem równanie prostej jest następujące:

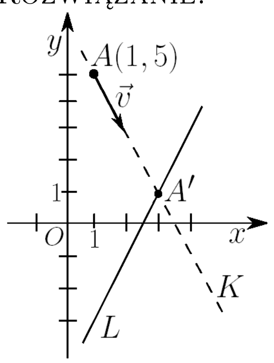
$$X = [-2,-1] + t[5,5].$$



Kolejne ćwiczenie pokazuje jak można wykorzystać równanie parametryczne prostej do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Ćwiczenie 2.13.9. Punkt $A(1,5)$ rzutujemy w kierunku wektora $\vec{v} = [1,-2]$ na prostą $L : (2+t, -1+2t)$. Znajdź współrzędne punktu A' otrzymanego w tym rzucie.

Rozwiązanie:



Zacznijmy od napisania równania parametrycznego prostej K przechodzącej przez A i równoległej do wektora $\vec{v}$, czyli prostej wzdłuż której rzutujemy punkt A na prostą L. Parametr w tym równaniu oznaczmy literą s dla rozróżnienia z parametrem t występującym w równaniu prostej L. Mamy więc

$$A + s \cdot \vec{v} = [1,5] + s \cdot [1,-2] = [1+s, 5-2s].$$

Punkt A' leży na prostej K, zatem jego współrzędne to $A' = (1+s, 5-2s)$ dla pewnej liczby s. Podobnie mamy, że $A' = (2+t, -1+2t)$ dla pewnego t rzeczywistego, gdyż A' leży też na prostej L. Porównując współrzędne punktu A' otrzymujemy:

$$\begin{cases} 1+s = 2+t \\ 5-2s = -1+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1+t \\ 6 = 2s+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1+t \\ 2 = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Wstawiając obliczoną wartość parametru dostajemy szukane współrzędne:

$$A' = (1+s,\ 5-2s) = (1+2,\ 5-2\cdot 2) = (3,1).$$

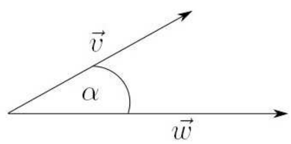
Rozdział 3

Iloczyn skalarny i wyznacznik pary wektorów

3.1 Definicja i własności iloczynu skalarnego

Iloczyn wektora przez wektor możemy zdefiniować tak, by otrzymać liczbę (skalar), bądź wektor. Zajmiemy się teraz iloczynem skalarnym, czyli, jak sama nazwa wskazuje, dającym w wyniku skalar.

Definicja 3.1.1. Iloczynem skalarnym dwóch wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ nazywamy liczbę, którą otrzymamy mnożąc iloczyn długości tych wektorów przez cosinus kąta α między nimi.



Iloczyn skalarny będziemy oznaczać przez $\vec{v} \circ \vec{w}$, zatem możemy zapisać:

$$\Diamond \qquad \vec{v} \circ \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha. \qquad \Diamond \tag{3.1.1}$$

Uwaga 3.1.2. Wartość iloczynu skalarnego nie zależy od tego, który z kątów utworzonych przez dane wektory weźmiemy: α, czy $2\pi - \alpha$. Mamy bowiem z parzystości i okresowości funkcji cosinus, że $\cos\alpha = \cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha)$. Wybieramy jednak zazwyczaj mniejszy z kątów, a więc ten z przedziału $(0, \pi)$.

3.1.3. Własności iloczynu skalarnego

Dla dowolnych wektorów $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ oraz liczby rzeczywistej λ mamy:

(a) $\vec{v} \circ \vec{w} = \vec{w} \circ \vec{v}$ (przemienność);

(b) $(\vec{v} + \vec{u}) \circ \vec{w} = \vec{v} \circ \vec{w} + \vec{u} \circ \vec{w}$ (rozdzielność względem dodawania);
$\vec{w} \circ (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \circ \vec{v} + \vec{w} \circ \vec{u}$

(c) $\lambda(\vec{v} \circ \vec{w}) = (\lambda \cdot \vec{v}) \circ \vec{w} = \vec{v} \circ (\lambda \cdot \vec{w})$ (łączność z mnożeniem przez liczbę);

(d) $\vec{v} \circ \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$ lub $\vec{w} = 0$ lub $\vec{v} \perp \vec{w}$, gdzie symbol $\perp$ oznacza prostopadłość wektorów;

(e) $\vec{v} \circ \vec{v} = |v|^2$ (lub inaczej: $|v| = \sqrt{\vec{v} \circ \vec{v}}$).

Wyprowadzimy niektóre z powyższych własności korzystając wprost z definicji iloczynu skalarnego.

Dowód.

(a) Przemienność iloczynu skalarnego wynika z przemienności mnożenia liczb. Mamy bowiem:

$$\vec{v} \circ \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = \vec{w} \circ \vec{v}.$$

(d) Z definicji mamy, że $\vec{v} \circ \vec{w} = 0 \Leftrightarrow |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha = 0$. Skoro iloczyn ma być równy zero, to któryś z czynników jest zerem. Mamy więc, że

$$\vec{v} \circ \vec{w} = 0 \Leftrightarrow |\vec{v}| = 0, \text{ lub } |\vec{w}| = 0, \text{ lub } \cos\alpha = 0.$$

Pierwsze dwie możliwośći zachodzą dokładnie wtedy, gdy dany wektor jest zerowy, natomiast ostatnia, gdy kąt między wektorami jest prosty, czyli, gdy są one prostopadłe (bo $\cos\frac{\pi}{2} = 0$).

(e) Własność ta jest prawdziwa, ponieważ kąt jaki tworzy dany wektor z sobą samym jest zerowy i wiemy, że $\cos 0 = 1$, stąd $\vec{v} \circ \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot 1 = |v|^2$.

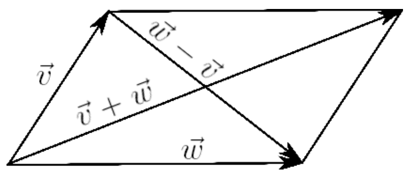
□

Iloczyn skalarny (wraz z całym rachunkiem wektorowym) możemy wykorzystać do dowodzenia twierdzeń znanych nam choćby z geometrii szkolnej. Popatrzmy na przykładowe zastosowanie.

Ćwiczenie 3.1.4. Udowodnij, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości jego przekątnych jest równa sumie kwadatów długości wszystkich jego boków.

Dowód.

Weźmy dowolny równoległobok o bokach będących wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$, tak jak na rysunku obok. Zauważmy, że jego przekątne to wektory $\vec{v} + \vec{w}$ oraz $\vec{w} - \vec{v}$.



Zapiszmy teraz sumę kwadratów długości przekątnych tego równoległoboku i wykorzystując podane wyżej własności iloczynu skalarnego dojdziemy do żądanej równości:

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 + |\vec{w} - \vec{v}|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \circ (\vec{v} + \vec{w}) + (\vec{w} - \vec{v}) \circ (\vec{w} - \vec{v}) =$$

$$= \vec{v} \circ \vec{v} + 2(\vec{v} \circ \vec{w}) + \vec{w} \circ \vec{w} + \vec{w} \circ \vec{w} - 2(\vec{w} \circ \vec{v}) + \vec{v} \circ \vec{v} =$$

$$= 2(\vec{v} \circ \vec{v}) + 2(\vec{w} \circ \vec{w}) = 2|\vec{v}|^2 + 2|\vec{w}|^2.$$

Ostatnie wyrażenie oznacza dokładnie sumę kwadratów długości wszystkich boków tego równoległoboku. □

3.1.5. Iloczyn skalarny we współrzędnych

Przypomnijmy, że każdy wektor ma jednoznaczny rozkład względem wersorów, którego współczynniki rozkładu są równe współrzędnym tego wektora (patrz podrozdział 2.11). Chcąc zapisać iloczyn skalarny we współrzędnych, pomocne będą następujące równości dotyczące wersorów:

$$\vec{e_1} \circ \vec{e_1} = |\vec{e_1}|^2 = 1,$$

$$\vec{e_2} \circ \vec{e_2} = |\vec{e_2}|^2 = 1,$$

$$\vec{e_1} \circ \vec{e_2} = 0 \text{ (bo } \vec{e_1} \perp \vec{e_2}).$$

Obliczmy zatem iloczyn skalarny wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2]$ posługując się rozkładami tych wektorów względem wersorów: $\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2}$, $\vec{w} = w_1\vec{e_1} + w_2\vec{e_2}$ oraz wykorzystując powyżej przedstawione równości i własności iloczynu skalarnego:

$$\begin{aligned}\vec{v} \circ \vec{w} &= (v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2}) \circ (w_1\vec{e_1} + w_2\vec{e_2}) = \\ &= (v_1\vec{e_1}) \circ (w_1\vec{e_1}) + (v_1\vec{e_1}) \circ (w_2\vec{e_2}) + (v_2\vec{e_2}) \circ (w_1\vec{e_1}) + (v_2\vec{e_2}) \circ (w_2\vec{e_2}) = \\ &= v_1 \cdot w_1 \cdot \vec{e_1} \circ \vec{e_1} + v_1 \cdot w_2 \cdot \vec{e_1} \circ \vec{e_2} + v_2 \cdot w_1 \cdot \vec{e_2} \circ \vec{e_1} + v_2 \cdot w_2 \cdot \vec{e_2} \circ \vec{e_2} = \\ &= v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc, że iloczyn skalarny dwóch wektorów jest sumą iloczynu pierwszych współrzędnych oraz iloczynu drugich współrzędnych tych wektorów , co zapisujemy wzorem:

$$\Diamond \qquad [v_1, v_2] \circ [w_1, w_2] = v_1w_1 + v_2w_2. \qquad \Diamond \tag{3.1.2}$$

Przykład 3.1.6. Obliczmy iloczyn skalarny wektorów $[3, -2]$ i $[4, 1]$:

$$[3, -2] \circ [4, 1] = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 = 12 - 2 = 10.$$

3.2 Kąt między niezerowymi wektorami

Z definicji iloczynu skalarnego ($\vec{v} \circ \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha$) oraz przy założeniu, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są niezerowe, otrzymujemy następującą równość:

$$\Diamond \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{v} \circ \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}. \qquad \Diamond \tag{3.2.1}$$

Jeśli będziemy znali współrzędne wektorów, to będziemy potrafili wyliczyć cosinus kąta pomiędzy tymi wektorami, a co za tym idzie również i miarę tego kąta. Wzór (3.2.1) dla $\vec{v} = [v_1, v_2]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2]$ jest następujący:

$$\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} \cdot \sqrt{{w_1}^2 + {w_2}^2}}. \tag{3.2.2}$$

Przykład 3.2.1. Wyznaczmy kąt α pomiędzy wektorami $[3,\sqrt{3}]$, $[2,0]$.
Liczymy zgodnie ze wzorem (3.2.2):

$$\cos\alpha = \frac{[3,\sqrt{3}]\circ[2,0]}{|[3,\sqrt{3}]|\cdot|[2,0]|} = \frac{3\cdot 2+\sqrt{3}\cdot 0}{\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}\cdot\sqrt{2^2}} = \frac{6}{2\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Szukamy teraz takiego kąta α, by $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Otrzymujemy więc, że kąt α pomiędzy danymi wektorami wynosi $30°$.

3.2.2. Prostopadłość wektorów we współrzędnych

Szczególny przypadek wzoru (3.2.2) mamy dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$, czyli gdy niezerowe wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe. Wtedy $\cos\alpha = 0$, zatem dostajemy następujący warunek.

Fakt 3.2.3. *Niezerowe wektory $\vec{v}[v_1,v_2], \vec{w}[w_1,w_2]$ są prostopadłe $\Leftrightarrow v_1w_1+v_2w_2 = 0$.*

Ćwiczenie 3.2.4. Znajdź wektor prostopadły do wektora $[6,-8]$ i długości dwa razy mniejszej.
ROZWIĄZANIE:
Oznaczmy szukany wektor przez $[a,b]$. Z warunku prostopadłości otrzymujemy, że

$$[6,-8]\perp[a,b] \Leftrightarrow 6a-8b=0 \Leftrightarrow a=\frac{4}{3}b.$$

Drugi warunek zadania dotyczący długości szukanego wektora, zapiszemy równaniem $|[a,b]| = \frac{1}{2}|[6,-8]|$. Łatwo obliczyć, że $|[6,-8]| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10$, zatem $|[a,b]| = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5$. Mamy więc, że: $\sqrt{a^2+b^2} = 5$, a stąd $a^2+b^2 = 25$. Wstawiając do tego równania wcześniej wyznaczony warunek na współrzędną a wyliczamy współrzędną b:

$$\left(\frac{4}{3}b\right)^2+b^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{16}{9}b^2+b^2 = 25 \Leftrightarrow 16b^2+9b^2 = 25\cdot 9 \Leftrightarrow 25b^2 = 25\cdot 9 \Leftrightarrow b^2 = 9.$$

Zatem $b = \pm 3$, natomiast $a = \frac{4}{3}\cdot b = \pm 4$. Istnieją więc dwa wektory spełniające warunki zadania: $[-3,-4]$ oraz $[3,4]$.

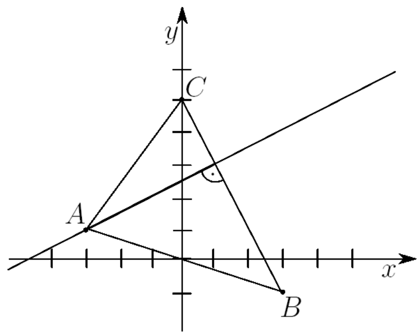
Uwaga 3.2.5. Przykładem wektora prostopadłego do $[v_1,v_2]$ jest wektor $[-v_2,v_1]$, jak również wektor $[v_2,-v_1]$. Mamy bowiem równości $v_1(-v_2)+v_2v_1 = 0$ oraz $v_1v_2+v_2(-v_1) = 0$, które zgodnie z Faktem 3.2.3 dowodzą prostopadłości odpowiednich par wektorów.

Kolejne ćwiczenie pokazuje jak można wykorzystywać rozpoznawanie prostopadłości we współrzędnych do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Ćwiczenie 3.2.6. Znajdź równanie parametryczne prostej zawierającej wysokość trójkąta o wierzchołkach $A(-3,1)$, $B(3,-1)$, $C(0,5)$ opuszczonej z wierzchołka A na bok BC.

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć równanie parametryczne danej prostej potrzebujemy znać punkt początkowy i wektor kierunkowy tej prostej. W tym przypadku za punkt początkowy bierzemy A, natomiast wektorem kierunkowym będzie pewien wektor $\vec{v} \perp BC$. Wyznaczmy współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$:



$$\overrightarrow{BC} = [0-3, 5-(-1)] = [-3, 6].$$

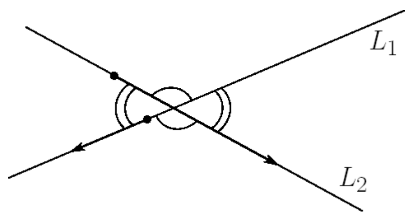
Zgodnie z Uwagą 3.2.5 przykładem wektora prostopadłego do $\overrightarrow{BC}$ jest $\vec{v} = [6,3]$.

Zatem możemy już zapisać równanie parametryczne szukanej prostej:

$$X = A + t\vec{v}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 1 + 3t \end{cases}.$$

Uwaga 3.2.7.

Dla danych dwóch prostych L_1 i L_2 zadanych parametrycznie, jeden z kątów między nimi jest równy kątowi pomiędzy wektorami kierunkowymi tych prostych.



Można to wykorzystać do wyznaczania kąta pomiędzy prostymi zadanymi za pomocą równań parametrycznych, jak w ćwiczeniu poniżej.

Ćwiczenie 3.2.8. Znajdź kąt pomiędzy prostymi o równaniach parametrycznych $(1+3t,\ -2+t)$ i $(-3+(3-\sqrt{3})t,\ 4+(1+3\sqrt{3})t)$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że szukany kąt α jest równy kątowi między wektorami kierunkowymi tych prostych równymi odpowiednio $[3,1]$ i $[3-\sqrt{3}, 1+3\sqrt{3}]$. Wstawiając do wzoru (3.2.2) otrzymujemy:

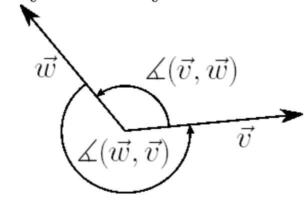
$$\cos\alpha = \frac{3(3-\sqrt{3}) + 1 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{(3-\sqrt{3})^2 + (1+3\sqrt{3})^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = \frac{1}{2},$$

a stąd wyliczamy, że $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3.3 Wyznacznik pary wektorów

W przypadku wyznaczania cosinusa kąta między dwoma wektorami nie było znaczenia, który spośród dwóch kątów utworzonych przez te wektory wybierzemy.

Przy wyznaczaniu sinusa kąta między wektorami wybór ten będzie istotny. Rozróżniamy zatem **kąty zorientowane**, w których kolejność ramion jest ważna. Będziemy je oznaczać poprzez zapisanie kolejno ramion kąta, tak jak na rysunku obok.



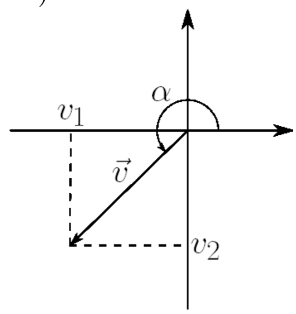
Zanim wyznaczymy wzór na sinus kąta zorientowanego między wektorami, przypomnijmy współrzędne biegunowe wektora (patrz punkt 2.2.4).

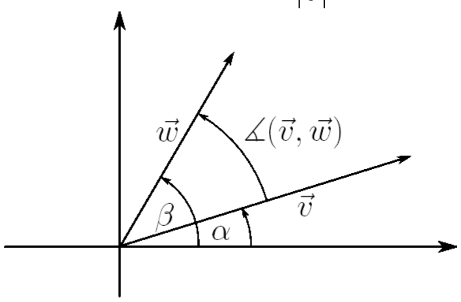
Jeśli α jest kątem biegunowym niezerowego wektora $\vec{v} = [v_1, v_2]$, to

$$v_1 = |\vec{v}| \cos\alpha, \qquad v_2 = |\vec{v}| \sin\alpha,$$

a stąd otrzymujemy równości

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \qquad \sin\alpha = \frac{v_2}{|\vec{v}|}.$$





Zauważmy, że zorientowany kąt pomiędzy wektorami $\measuredangle(\vec{v},\vec{w})$ jest różnicą kątów biegunowych wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$:

$$\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \beta - \alpha.$$

Obliczmy teraz sinus takiego kąta wstawiając wyliczone wcześniej równości ze współrzędnych biegunowych:

$$\sin\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta = \frac{w_2}{|\vec{w}|}\cdot\frac{v_1}{|\vec{v}|} - \frac{v_2}{|\vec{v}|}\cdot\frac{w_1}{|\vec{w}|} = \frac{w_2 v_1 - v_2 w_1}{|\vec{v}||\vec{w}|}.$$

Wzór na **sinus kąta zorientowanego między wektorami** jest zatem następujący:

$$\sin\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{w_2 v_1 - v_2 w_1}{|\vec{v}||\vec{w}|}. \tag{3.3.1}$$

Definicja 3.3.1. Wyznacznikiem pary wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2]$, $\vec{w} = [w_1, w_2]$ nazywamy liczbę oznaczaną przez $\det(\vec{v},\vec{w})$ i daną wzorem:

$$\diamondsuit \qquad \det(\vec{v},\vec{w}) = w_2 v_1 - v_2 w_1. \qquad \diamondsuit \tag{3.3.2}$$

Zauważmy, że wyznacznik to nic innego jak wyrażenie występujące w liczniku wzoru (3.3.1) na sinus kąta.

3.3.2. Własności wyznacznika

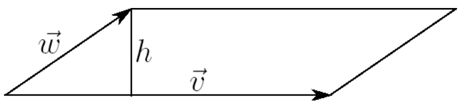
Poniższe własności wynikają z definicji wyznacznika i ze wzoru (3.3.1), a uzasadnienie ich nie jest trudne. Podamy zatem tylko krótkie wyjaśnienia.

(a) $\det(\vec{v}, \vec{w}) = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$;

(b) $\det(\vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{w})$ (antyprzemienność), bo $\measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = 360 - \measuredangle(\vec{w}, \vec{v})$, a zatem $\sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = \sin(360 - \measuredangle(\vec{w}, \vec{v})) = -\sin \measuredangle(\vec{w}, \vec{v})$;

(c) $\det(t\vec{v}, \vec{w}) = t \det(\vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{v}, t\vec{w})$ (dwuliniowość);

(d) $|\det(\vec{v}, \vec{w})|$ = pole P równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{v}$ i $\vec{w}$,



bo $h = |\vec{w}| \cdot |\sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})|$, zaś $P = |\vec{v}| \cdot h = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})|$;

(e) niezerowe wektory $\vec{v}, \vec{w}$ są równoległe $\Leftrightarrow \det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$, bo $\det(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = 0$.

W poniższym ćwiczeniu z geometrii analitycznej zastosujemy jedną w wymienionych powyżej własności wyznacznika.

Ćwiczenie 3.3.3. Pole trójkąta o wierzchołkach $A(2, -3), B(-1, 2), C(x, y)$ wynosi 4. Wyznaczmy współrzędne wierzchołka C, jeśli wiadomo, że leży on na osi Ox.

ROZWIĄZANIE:

Zauważmy najpierw, że $y = 0$. Znamy (z własności (d)) wzór na pole równoległoboku rozpiętego na dwóch wektorach. Wiemy także, że pole to jest dwukrotnie większe od pola trójkąta, którego dwoma bokami są te wektory, a trzecim jest odpowiednia przekątna równoległoboku. Zatem pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = 4$. Obliczmy współrzędne wektorów:

$$\overrightarrow{AB} = [-1 - 2, 2 + 3] = [-3, 5] \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{AC} = [x - 2, 3].$$

Podstawiając do wzoru na pole trójkąta ABC otrzymujemy:

$$|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = |3 \cdot (-3) - 5 \cdot (x - 2)| = |-5x + 1| = 8.$$

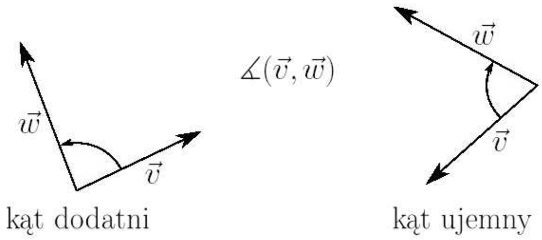
Stąd dostajemy dwa przypadki:

$$\begin{gathered} -5x + 1 = -8 \quad \vee \quad -5x + 1 = 8 \\ \Updownarrow \\ x = \tfrac{9}{5} \quad \vee \quad x = -\tfrac{7}{5}. \end{gathered}$$

Zatem możliwe współrzędne wierzchołka C to $(\frac{9}{5}, 0)$ lub $(-\frac{7}{5}, 0)$.

3.3.4. Znak zorientowanego kąta

Znak zorientowanego kąta określamy jako **dodatni**, gdy zakreślany łuk od pierwszego wektora w stronę drugiego (w obszarze tego spośród dwóch kątów wyznaczonych przez te wektory, który jest mniejszy niż 180°) jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara. W przeciwnym przypadku mówimy, że taki kąt jest **ujemnie zorientowany**.



Uwaga 3.3.5. Aby określić znak zorientowanego kąta, można wyznaczyć znak sinusa tego kąta, albo, co za tym idzie, także i znak wyznacznika wektorów tworzących ten kąt.

Przykład 3.3.6. Sprawdźmy, czy kąt między wektorami $\vec{v} = [8, -2]$ i $\vec{w} = [-3, 4]$ jest dodatni, czy ujemny. Ustalmy w tym celu, jaki jest znak wyznacznika:

$$\det \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = 4 \cdot 8 - (-2) \cdot (-3) = 32 - 6 = 26 > 0.$$

Wyznacznik jest dodatni, zatem zorientowany kąt między tymi wektorami też jest dodatni.

Rozdział 4

Równania krzywych

4.1 Równanie krzywej

Krzywą w matematyce nazywa się dowolną linię, np. prostą, parabolę. Zanim przejdziemy do zdefiniowania równania krzywej, zapoznamy się z pojęciem równania nieoznaczonego. Termin nieoznaczone bierze się stąd, że takie równania mają zwykle nieskończenie wiele par rozwiązań.

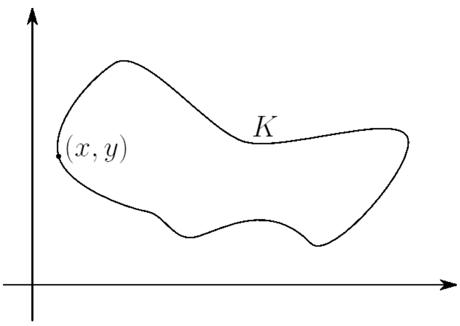
Definicja 4.1.1. Równaniem nieoznaczonym (z dwiema niewiadomymi) nazywamy równanie postaci $F(x,y)=0$, gdzie $F(x,y)$ jest dowolnym wyrażeniem algebraicznym zawierającym zmienne x i y.

Równaniami nieoznaczonymi są przykładowo: $x^2-\frac{1}{3}y+17=0$, $\sqrt{x+y^2}-4xy=0$.

Uwaga 4.1.2. Dowolne równanie z dwiema niewiadomymi można sprowadzić do postaci równania nieoznaczonego przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę, np. $x^2-2y^2=9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2y^2-9=0$.

Związek jaki jest pomiędzy krzywymi na płaszczyźnie i równaniami nieoznaczonymi wyjaśnia poniższa definicja.

Definicja 4.1.3. Krzywa K na płaszczyźnie Oxy **jest zadana równaniem** $F(x,y)=0$, gdy spełnione są warunki:



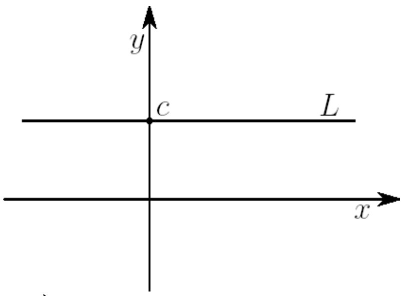
(1) współrzędne (x,y) dowolnego punktu należącego do krzywej K spełniają równanie $F(x,y)=0$;

(2) każda para liczb (x,y) spełniająca równanie $F(x,y)=0$ stanowi współrzędne pewnego punktu krzywej K.

Krócej: $\quad (x,y)\in K \Leftrightarrow F(x,y)=0$.

4.1.4. Przykłady krzywych i ich równania

1a) Prosta równoległa do osi Ox.

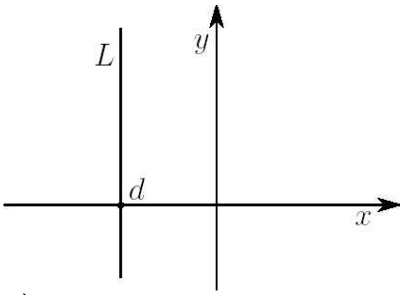


Równanie tej prostej to

$$y = c \quad \text{lub} \quad y - c = 0,$$

gdzie c jest ustaloną liczbą.

1b) Prosta prostopadła do osi Ox.

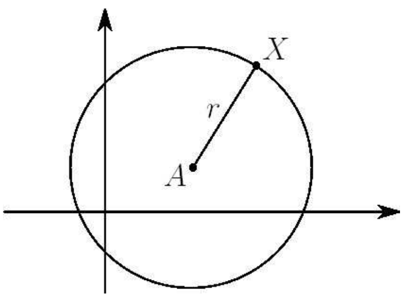


Jej równanie to

$$x = d \quad \text{lub} \quad x - d = 0,$$

gdzie d – ustalona liczba.

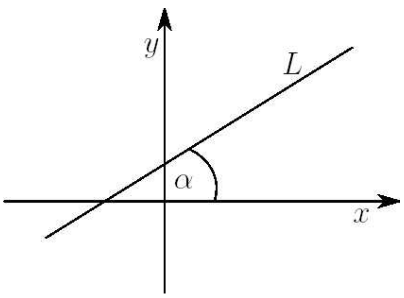
2) Okrąg o środku w punkcie $A(x_0, y_0)$ i promieniu $r > 0$.



Dla dowolnego punktu $X(x, y)$ leżącego na okręgu mamy, że $d(A, X) = r$, a stąd już dochodzimy do równania tej krzywej:

$$\big(d(A,X)\big)^2 = r^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0.$$

3) Wykres funkcji liniowej oraz dowolnej funkcji f.



Prosta L z rysunku obok jest wykresem pewnej funkcji liniowej $y = ax + b$, gdzie $a = \operatorname{tg}\alpha$ jest współczynnikiem nachylenia tej prostej. Równanie tej krzywej ma również postać:

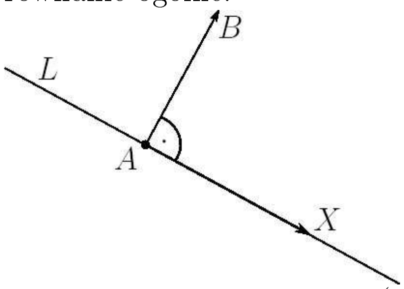
$$y - ax - b = 0.$$

Wykres funkcji liniowej jest tylko szczególnym przypadkiem krzywych będących wykresami dowolnych funkcji. Krzywa będąca wykresem funkcji f dana jest równaniem

$$y = f(x) \quad \text{lub} \quad y - f(x) = 0.$$

4.2 Równanie ogólne prostej

W rozdziale drugim poznaliśmy równanie parametryczne prostej. Wyznaczone ono zostało poprzez pewien punkt leżący na tej prostej (punkt początkowy) i wektor równoległy do niej (wektor kierunkowy). Teraz natomiast, mając punkt z danej prostej i wektor do niej prostopadły, otrzymamy inny rodzaj równania prostej – jej równanie ogólne.



Mamy dany wektor $\overrightarrow{AB} = [a, b]$. Wyznaczymy równanie prostej L prostopadłej do tego wektora i przechodzącej przez punkt $A(x_0, y_0)$. Taką prostą widzimy na rysunku z lewej strony.

Ustalmy dowolny punkt $X(x, y)$ na prostej L. Skoro $X \in L$, to spełnia warunek $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{AB}$, co jest równoważne temu, że $\overrightarrow{AX} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ (z własności 3.1.3(d)). Mamy zatem

$$[x - x_0, y - y_0] \circ [a, b] = 0,$$

a stąd, wobec dowolności wyboru punktu X, otrzymujemy **równanie prostej prostopadłej do wektora** $[a, b]$ **i przechodzącej przez punkt** (x_0, y_0), czyli prostej L:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Przekształcając dalej to równanie mamy

$$ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0.$$

Zauważmy, że wyrażenie $-ax_0 - by_0$ jest stałe, niezależne od zmiennych x i y. Oznaczmy je przez c. Powstałe równanie

$$\Diamond \qquad ax + by + c = 0 \qquad \Diamond \tag{4.2.1}$$

nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Definicja 4.2.1. Wektor $[a, b]$ nazywamy **wektorem normalnym** prostej zadanej równaniem (4.2.1).

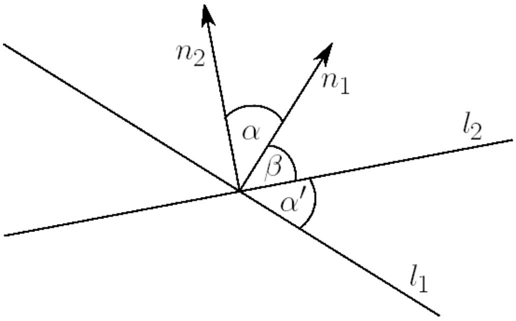
Uwaga 4.2.2. Każde równanie postaci $ax + by + c = 0$, o przynajmniej jednym ze współczynników a, b różnym od zera, jest równaniem pewnej prostej prostopadłej do wektora $[a, b]$.

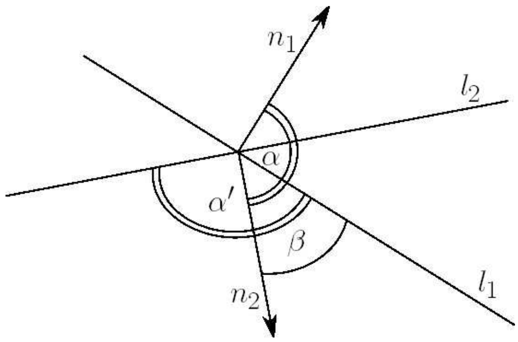
4.2.3. Kąt między prostymi zadanymi równaniami ogólnymi

Mamy dwie proste o równaniach ogólnych $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ oraz $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Zobaczmy, co możemy powiedzieć o kącie między prostymi o takich równaniach.

Fakt 4.2.4. *Jeden z kątów pomiędzy dwoma prostymi jest równy kątowi między ich wektorami normalnymi.*

Fakt ten obrazują poniższe rysunki: pierwszy od lewej dotyczy sytuacji, gdy oba wektory normalne leżą w tej samej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez jedną z prostych, natomiast drugi rysunek przedstawia sytuację, gdy wektory normalne leżą w różnych półpłaszczyznach.





Wektory n_1 i n_2 to odpowiednio wektory normalne prostych l_1 i l_2. Możemy zatem zapisać poniższe równości kątów do każdego z przypadków, skąd już otrzymamy, że kąt między wektorami normalnymi jest równy kątowi między prostymi:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \alpha' + \beta = 90^\circ \end{cases} \implies \alpha = \alpha', \qquad \begin{cases} \alpha = \beta + 90^\circ \\ \alpha' = \beta + 90^\circ \end{cases} \implies \alpha = \alpha'.$$

Fakt 4.2.5. *Cosinus jednego z kątów między prostymi* $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *oraz* $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *jest równy cosinusowi kąta między ich wektorami normalnymi* $n_1 = [a_1, b_1]$, $n_2 = [a_2, b_2]$ *i wynosi:*

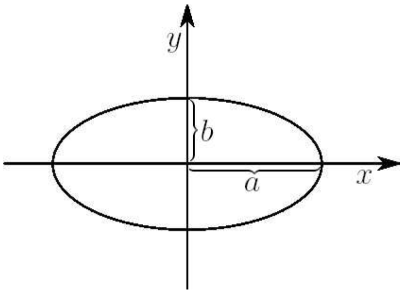
$$\cos\alpha = \frac{\vec{n_1} \circ \vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \tag{4.2.2}$$

Uwaga 4.2.6. Jako szczególny przypadek powyższego faktu mamy, że proste są prostopadłe $\Leftrightarrow$ wektory normalne są prostopadłe $\Leftrightarrow$ $[a_1, b_1] \circ [a_2, b_2] = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

4.3 Równanie elipsy, paraboli, hiperboli

W tym podrozdziale omówimy równania elipsy, paraboli i hiperboli. Krzywe te mają wspólną nazwę krzywych stożkowych, jednak nie będziemy wyjaśniać skąd bierze się to określenie. Podobnie też nie będziemy omawiać własności tych krzywych ani wyprowadzać ich równań, lecz skupimy się na podaniu równań krzywych w pewnych szczególnych, łatwych do opisania przypadkach. Podane niżej równania będziemy nazywać **równaniami kanonicznymi** tych krzywych.

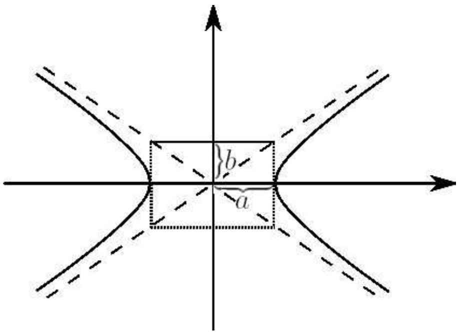
4.3.1. Elipsa



Widzimy, że na rysunku obok układ współrzędnych został dobrany tak, by osie symetrii elipsy pokrywały się z osiami układu. Odcinki a, b nazywamy półosiami elipsy a jej równanie to:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

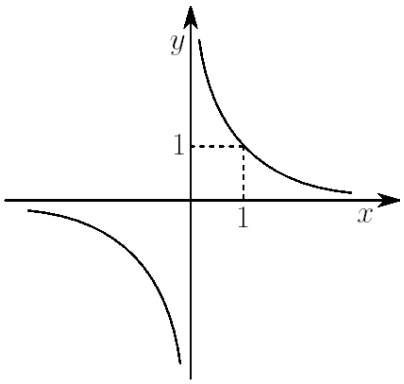
4.3.2. Hiperbola



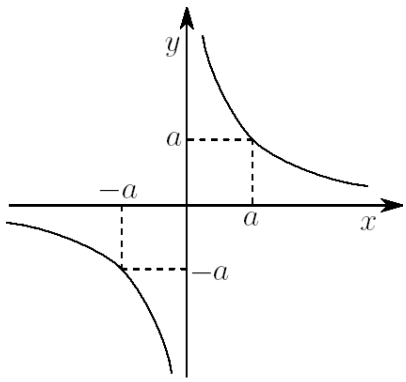
Dla hipeboli z rysunku obok jej osie symetrii pokrywają się z osiami układu współrzędnych. Przerywanymi liniami zaznaczone są jej asymptoty, zaś odcinki a i b to półosie hiperboli. Równanie takiej krzywej ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

W szkole spotykaliśmy się z hiperbolami umieszczonymi w takim układzie współrzędnych, by ich asymptoty pokrywały się z osiami układu. Takie krzywe i ich równania przedstawione są poniżej.



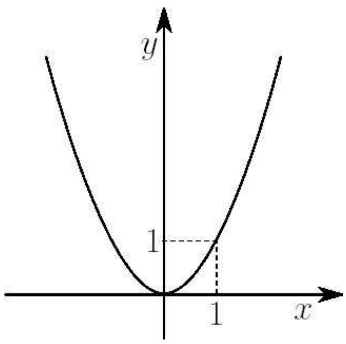
$x \cdot y = 1$



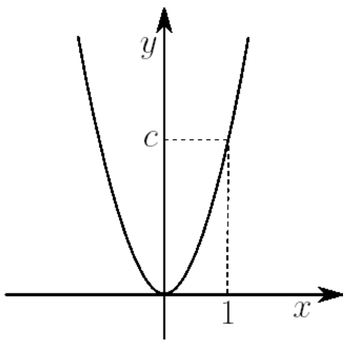
$x \cdot y = a^2$

4.3.3. Parabola

Parabolę znamy ze szkoły jako wykres funkcji kwadratowej. Narysowane poniżej parabole charakteryzuje to, że ich oś symetrii pokrywa się o osią OY. Wzory tych krzywych zapisane są obok każdego z rysunków:



$y = x^2,$



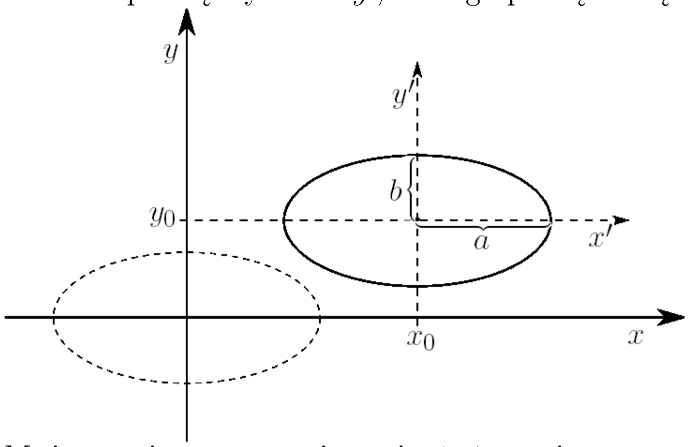
$y = cx^2,$

gdzie c – stała.

4.4 Przesuwanie krzywej

Niektóre z przedstawionych w tym rozdziale krzywych miały dosyć szczególne położenia w układzie współrzędnych. Znając już ich równania, przejdziemy do równań krzywych przesuniętych w dowolne inne miejsca.

Elipsa, której środek pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, ma równanie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Elipsę przesuwamy w ten sposób, by jej środek znalazł się w punkcie (x_0, y_0). Chcąc wyznaczyć równanie takiej krzywej wprowadzimy pomocniczy układ współrzędnych $Ox'y'$, którego początek będzie zarazem środkiem elipsy.



Zapisujemy równanie przesuniętej elipsy w nowych współrzędnych:

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1.$$

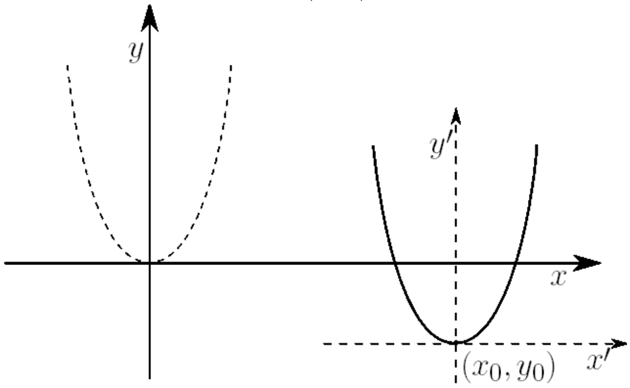
Łatwo też zauważamy, że

$$x' = x - x_0,$$
$$y' = y - y_0.$$

Możemy więc ostatecznie zapisać równanie przesuniętej elipsy w wyjściowych współrzędnych jako

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

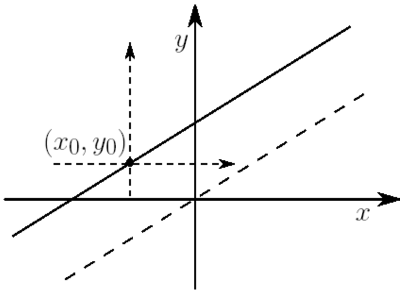
Kolejna krzywą, którą zbadamy będzie parabola. W szczególnym przypadku jej wierzchołek to punkt $(0,0)$ i wtedy ma ona równanie $y = cx^2$.



Przesuwamy parabolę do punktu (x_0, y_0) będącego teraz jej wierzchołkiem. Podobnie jak poprzednio, wprowadzając nowy układ współrzędnych, gdzie $x' = x - x_0$ oraz $y' = y - y_0$, otrzymujemy równanie:

$$y' = c(x')^2$$
$$\Updownarrow$$
$$y - y_0 = c(x-x_0)^2.$$

Łatwo dostaniemy też równanie prostej o nachyleniu k przechodzącej przez punkt (x_0, y_0) korzystając z równania $y = k \cdot x$ określającego prostą o tym samym nachyleniu, ale przechodzącą przez początek układu współrzędnych:



$$x' = x - x_0$$
$$y' = y - y_0$$
$$y' = kx'$$
$$\Updownarrow$$
$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Te trzy przykłady dotyczące przeunięć krzywych obrazują następujący ogólny fakt.

Fakt 4.4.1. *Jeżeli krzywą o równaniu $F(x, y) = 0$ przesuniemy tak, aby jej punkt, który znajdował się w $(0, 0)$ przesunął się do punktu (x_0, y_0), to przesunięta krzywa dana jest równaniem $F(x - x_0, y - y_0) = 0$.*

4.5 Rozpoznawanie krzywej na podstawie równania oraz miejsce geometryczne

Zajmiemy się teraz problemem rozpoznawania krzywych na podstawie ich równań. Mając pewne równanie przekształcamy je tak, by można było określić rodzaj krzywej. Taką operację nazywamy sprowadzaniem do postaci kanonicznej.

Przykład 4.5.1. Zbadajmy jaką krzywą przedstawia równanie

$$x^2 - 6x + y^2 + 5y + 15 = 0.$$

Przekształćmy je do postaci równania kanonicznego:

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 6x + 9) + \left(y^2 + 5y + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2\right) - 9 - \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + 15 = 0\\
&(x-3)^2 + \left(y + \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} = 0\\
&(x-3)^2 + \left(y + \tfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

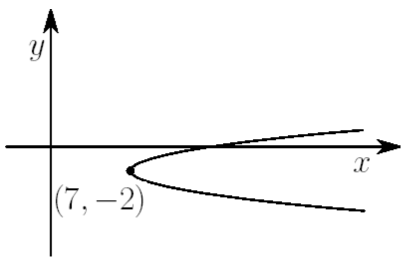
Jest to okrąg o środku $\left(3, -\frac{5}{2}\right)$ i promieniu $\frac{1}{2}$.

Kolejny przykład również polega na rozpoznaniu krzywej na podstawie równania. Tym razem jednak otrzymane równanie będzie się nieco różniło od znanej nam postaci kanonicznej.

Przykład 4.5.2. Jaką krzywą przedstawia równanie $y^2 + 4y - \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = 0$? Przekształcając to równanie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&(y^2 + 4y + 4) - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3} - 4 = 0\\
&(y+2)^2 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{7}{3} = 0\\
&(y+2)^2 - \tfrac{1}{3}(x - 7) = 0\\
&x - 7 = 3(y+2)^2.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że jest to krzywa o równaniu $x = 3y^2$ odpowiednio przesunięta. Jest to równanie paraboli, ponieważ względem znanego nam równanie kanonicznego paraboli $y = c \cdot x^2$ zamienione są role x i y. Taka parabola ma oś symetrii równoległą do osi Ox, a dla tego konkretnego przypadku wierzchołek ma w punkcie $(7, -2)$, tak jak to przedstawia rysunek obok.



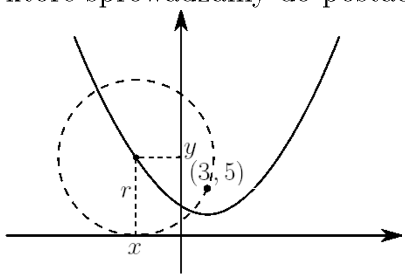
Miejscem geometrycznym nazywamy zbiór punktów spełniających określony warunek. Na płaszczyźnie będzie to najczęściej krzywa, np. miejscem geometrycznym punktów znajdujących się w ustalonej odległości r od ustalonego punktu S jest okrąg.

Aby znaleźć (rozpoznać jaką krzywą tworzy) pewne miejsce geometryczne, musimy najpierw przetłumaczyć zadany warunek geometryczny na odpowiednie równanie a następnie na podstawie tego równania rozpoznać krzywą. Ilustruje to poniższe ćwiczenie.

Ćwiczenie 4.5.3. Znajdź miejsce geometryczne punktów $X(x, y)$ będących środkami okręgów przechodzących przez punkt $(3, 5)$ i stycznych do osi Ox.

ROZWIĄZANIE:

Wiemy, że okrąg o środku w punkcie (x, y) i przechodzący przez $(3, 5)$ ma równanie $(3-x)^2 + (5-y)^2 = r^2$, gdzie r jest promieniem. Ale skoro okrąg ten ma być styczny do osi Ox, to $r = y$. Zatem mamy równanie $(3-x)^2 + (5-y)^2 = y^2$, które sprowadzamy do postaci kanonicznej:



$$9 - 6x + x^2 + 25 - 10y + y^2 = y^2$$
$$x^2 - 6x + 34 - 10y = 0$$
$$(x^2 - 6x + 9) + 34 - 9 = 10y$$
$$10y = (x-3)^2 + 25$$
$$y - \frac{5}{2} = \frac{1}{10}(x-3)^2.$$

Szukanym miejscem geometrycznym jest parabola o wierzchołku w punkcie $(3, \frac{5}{2})$.

Rozdział 5

Układ równań

5.1 Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Mamy dany układ równań:

$$(\bigstar) \quad \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{gdzie } x, y \text{ – niewiadome,} \\ a, b, c, d, p, q \text{ – współczynniki równań.} \end{array}$$

Rozwiążmy ten układ metodą eliminacji (przez podstawianie). Aby wyznaczyć niewiadomą x mnożymy najpierw pierwsze równanie obustronnie przez d, a drugie przez b:

$$\begin{cases} adx + bdy = pd \\ bcx + bdy = qb \end{cases}.$$

Następnie odejmujemy stronami otrzymując

$$(\blacktriangle) \quad (ad - bc)x = pd - qb,$$

$$\text{a stąd} \quad x = \frac{pd - qb}{ad - bc}.$$

Podobnie wyznaczamy y (mnożąc pierwsze równwnie przez c, drugie przez a):

$$y = \frac{aq - cp}{ad - bc}.$$

Zwróćmy jednak uwagę, że nie zawsze rozwiązanie (x, y) istnieje, bo może się np. zdarzyć, że $ad - bc = 0$. W niektórych przypadkach możemy także otrzymać nieskończenie wiele par rozwiązań. Dokładniejsze informacje o liczbie rozwiązań równania $(\bigstar)$ zawiera poniższa uwaga.

Uwaga 5.1.1. Jeśli $ad - bc \neq 0$ to układ $(\bigstar)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w postaci pary liczb (x, y), zadane powyższymi wzorami na x i y.
Jeśli $ad - bc = 0$ to w równaniu $(\blacktriangle)$ zachodzą dwie możliwości:

- $pd - qb \neq 0$ i wtedy układ $(\bigstar)$ nie ma rozwiązań, bo równanie $(\blacktriangle)$ jest wtedy postaci $0 \cdot x = pd - qb$ i nie ma rozwiązań;

- $pd - qb = 0$ i wtedy układ (★) ma nieskończenie wiele par rozwiązań, bo równanie (▲) ma wtedy postać $0 \cdot x = 0$ i jest spełnione przez dowolną liczbę rzeczywistą x, zaś dla każdego takiego x znajdziemy też odpowiednie y.

Przykład 5.1.2. Rozwiążmy poniższe układy równań. Będziemy stosować te same oznaczenia na współczynniki jak wcześniej.

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -x + 4y = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} ad - bc &= 3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-1) = 10, \\ pd - qb &= 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = 10, \\ aq - cp &= 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 5. \end{aligned}$$

Widzimy, że $ad - bc \neq 0$, więc istnieje jedna para rozwiązań:

$$x = \frac{pd - qd}{ad - bc} = \frac{10}{10} = 1, \qquad y = \frac{aq - cp}{ad - bc} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

2. $\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} ad - bc &= 2 \cdot 3 - (-6) \cdot (-1) = 0, \\ pd - qb &= 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-6) = 18 \neq 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z Uwagą 5.1.1 stwierdzamy, że ten układ nie ma rozwiązań, co możemy sprawdzić np. mnożąc drugie równanie przez -2:

$$\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ 2x - 6y = -2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 4 = -2 \quad \text{sprzeczność.}$$

Taki układ nazywamy **układem sprzecznym**.

3. $\begin{cases} -5x + 15y = 10 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} ad - bc &= (-5) \cdot (-3) - 15 \cdot 1 = 0, \\ pd - qb &= 10 \cdot (-3) - (-2) \cdot 15 = 0. \end{aligned}$$

Mamy zatem nieskończenie wiele par rozwiązań. Jako sprawdzenie mnożymy drugie równanie przez -5 i otrzymujemy pierwsze równanie, a więc rzeczywiście nieskończenie wiele par liczb, które spełniają pierwsze równianie, spełniają także i drugie. Przekształcając jedno z tych równań (obojętnie które) otrzymujemy, że $x = 3y - 2$. Zatem wszystkie pary liczb postaci $(3y - 2,\ y)$ są rozwiązaniami tego układu.

Taki układ nazywamy **układem zależnym**.

5.2 Algebraiczny język teorii układów równań liniowych

Układ równań liniowych (★) $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$ możemy zakodować w postaci uporządkowanej tablicy liczb zawierającej same współczynniki:

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{bmatrix}.$$

Tablicę taką nazywamy **macierzą układu równań** (★).

Ogólnie, **macierz** to prostokątna tablica liczb lub wyrażeń algebraicznych, czyli tzw. **wyrazów** macierzy. Przykłady:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & b & a-b \\ -b & a & a+b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Macierz $m{\times}n$ (czytamy: m na n) składa się z m **wierszy** i n **kolumn**, zatem zawiera $m \cdot n$ wyrazów. Powyższe przykłady to macierze 2×2, 2×3 i 3×3.

Gdy macierz ma tyle samo wierszy co kolumn ($n{\times}n$), to nazywamy ją **macierzą kwadratową**.

Wyznacznik macierzy kwadratowej 2×2 to liczba:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Uwaga 5.2.1. Zauważmy, że wyznacznik macierzy 2×2 jest równy wyznacznikowi pary odpowiednich wektorów zapisanych w wierszach, bądź kolumnach tej macierzy:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\big([a,b],[c,d]\big) = \det\big([a,c],[b,d]\big).$$

Przy użyciu wyznaczników macierzy kwadratowych możemy prosto zapisywać wzór na rozwiązania układu rówanań postaci (★) .

Przypomnijmy, że macierz takiego układu wygląda następująco: $\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{bmatrix}$. Wyrazy w wierszach odpowiadają współczynnikom z odpowiednich równań, natomiast poszczególne kolumny to kolejno współczynniki przy x, przy y oraz wyrazy wolne. Określmy teraz potrzebne wyznaczniki macierzy kwadratowych:

- **wyznacznik główny** układu (★)
  $W = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, czyli wyznacznik **macierzy głównej** utworzonej ze współczynników stojących przy niewiadomych.
- **wyznaczniki pomocnicze** układu (★)
  $W_x = \det \begin{bmatrix} p & b \\ q & d \end{bmatrix}$, $W_y = \det \begin{bmatrix} a & p \\ c & q \end{bmatrix}$, czyli wyznaczniki **macierzy pomocniczych** powstałych przez zastąpienie w macierzy głównej kolumny współczynników przy x (odpowiednio przy y) kolumną wyrazów wolnych.

Uwagę 5.1.1 z poprzedniego podrozdziału możemy teraz sformułować przy użyciu wyznaczników w następujący sposób.

Twierdzenie 5.2.2.

1. *Jeśli* $W \neq 0$, *to układ* ($\bigstar$) *ma dokładnie jedną parę liczb będącą rozwiązaniem:*
$$x = \frac{W_x}{W}, \quad y = \frac{W_y}{W}.$$
2. *Jeśli* $W = 0$, *natomiast* $W_x \neq 0$ *lub* $W_y \neq 0$, *to układ jest sprzeczny i nie ma żadnych rozwiązań.*
3. *Jeśli* $W = 0$ *oraz* $W_x = 0$ *i* $W_y = 0$, *to układ jest zależny i ma nieskończenie wiele rozwiązań.*

Metodę rozwiązywania układu równań za pomocą wzorów z powyższego twierdzenia nazywać będziemy **metodą wyznaczników**. Spójrzmy na rozwiązanie przykładowego układu równań tą metodą.

Przykład 5.2.3. Rozwiążmy układ równań $\begin{cases} 8x + 3y = 7 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ metodą wyznaczników.
Wyliczmy najpierw wartość wyznacznika głównego:
$$W = \det \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 8 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 2.$$
$W \neq 0$ zatem istnieje jedno rozwiązanie. Wyznaczniki macierzy pomocniczych wynoszą:
$$W_x = \det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 7 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 10,$$
$$W_y = \det \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 8 \cdot (-1) - 7 \cdot 2 = -22.$$
Z Twierdzenia 5.2.2 dostajemy, że rozwiązaniem danego układu jest para liczb
$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{10}{2} = 5, \quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{-22}{2} = -11.$$

5.3 Różne interpretacje układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

5.3.1. Interpretacja graficzna

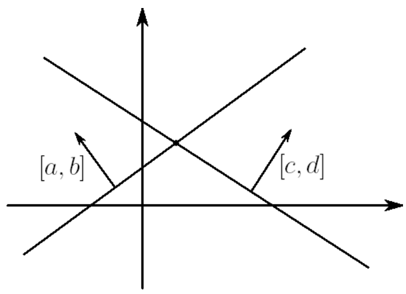
Poszczególne równania z układu $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$ możemy traktować jako równania prostych o wektorach normalnych odpowiednio $[a, b]$ i $[c, d]$. Rozpatrując przypadki z Twierdzenia 5.2.2 podamy przy każdym z nich własności tych prostych. Przypomnijmy najpierw, że

$$W = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\big([a,b],\ [c,d]\big).$$

Z rozdziału czwartego (własność 4.3.2 e) wiemy, że wektory $[a,b]$ i $[c,d]$ nie są równoległe, gdy ich wyznacznik jest różny od zera. W związku z tym proste tylko w pierwszym przypadku twierdzenia nie są równoległe. Spójrzmy na pozostałe własności.

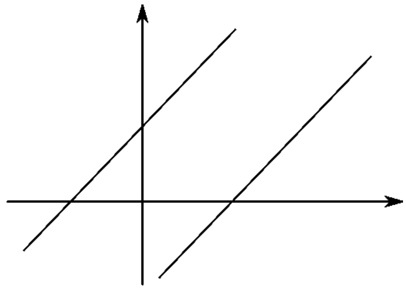
(1) $W \neq 0$:

wektory normalne nie są współliniowe, więc proste nie są równoległe, a zatem przecinają się dokładnie w jednym punkcie, którego współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu.



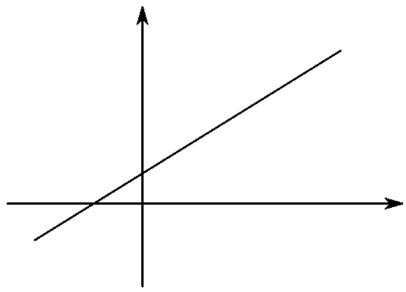
(2) $W = 0,\ W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$:

proste są równoległe, ale różne, więc nie mają punktów wspólnych, co oznacza brak rozwiązań układu.



(3) $W = 0,\ W_x = 0,\ W_y = 0$:

proste pokrywają się, zatem mają nieskończenie wiele punktów wspólnych, czyli układ ma nieskończenie wiele par rozwiązań.



5.3.2. Interpretacja wektorowa

Do tej pory współrzędne wektora zapisywaliśmy w wierszu, teraz natomiast zastosujemy zapis kolumnowy: $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. Korzystając ze znanych własności:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \lambda \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix},$$

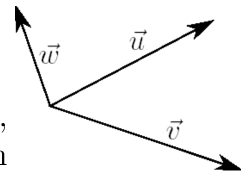
możemy zapisać wektorowo układ ($\bigstar$) jako:

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \cdot \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}.$$

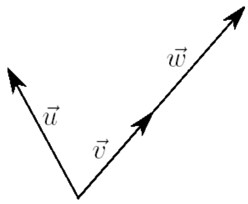
Zauważmy, że przy takiej interpretacji, rozwiązanie układu (★) jest równoważne ze znalezieniem rozkładu wektora $\vec{u} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ w kombinację liniową wektorów $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ i $\vec{w} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Dokładniej, chodzi o znalezienie współczynników x i y takiego rozkładu.
Rozważmy trzy przypadki.
1. Jeśli $W \neq 0$, czyli inaczej

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = \det(\vec{v}, \vec{w}) \neq 0,$$

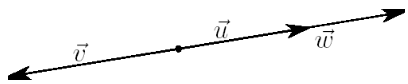
to wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są liniowo niezależne. Mamy więc (z Faktu 2.10.2), że wektor $\vec{u}$ ma jednoznaczny rozkład w kombinację liniową tych wektorów. Ponadto współczynniki tego rozkładu stanowią jedyne rozwiązanie tego układu równań.



2. Gdy $W = 0, W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$ wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są współliniowe, natomiast wektor $\vec{u}$ nie jest z nimi współliniowy. Zatem żadna kombinacja liniowa wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ nie będzie równa $\vec{u}$, co jest jednoznaczne z tym, że układ nie ma rozwiązań.



3. Jeśli $W = 0,\ W_x = 0,\ W_y = 0$, to wszystkie wektory $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{u}$ są współliniowe. Otrzymujemy więc w tym przypadku nieskończenie wiele rozwiązań.



Przykład 5.3.3. Znajdźmy liczbę rozwiązań równania wektorowego

$$x \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \det \left(\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$W_x = \det \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = -19 \neq 0.$$

Układ ten nie ma rozwiązań.

Na zakończenie tego rozdziału przedstawiamy przykładowe zastosowanie układu równań.

Ćwiczenie 5.3.4. Znajdź wektor $\vec{v}$ współliniowy z wektorem $[3,1]$, jeśli wiadomo, że jego początkiem jest punkt $A(-2,2)$, natomiast jego koniec B leży na prostej $2x-y-4=0$.

ROZWIĄZANIE:

Znajdujemy najpierw równanie prostej zawierającej szukany wektor $\vec{v}$:

$$[x,y]=[-2,2]+t[3,1]=[-2+3t,2+t].$$

To równanie parametryczne przekształcamy do postaci ogólnej w następujący sposób:

$$\left.\begin{cases} x=-2+3t & \Rightarrow\ \ t=\frac{x+2}{3} \\ y=2+t & \Rightarrow\ \ t=y-2 \end{cases}\right\} \Rightarrow\ \frac{x+2}{3}=y-2\ \Rightarrow x-3y+8=0.$$

Teraz już możemy zapisać oba równania prostych jako układ równań, którego rozwiązaniem będzie punkt B, czyli przecięcie tych prostych:

$$\begin{cases} x-3y=-8 \\ 2x-y=4 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy ten układ metodą wyznacznikową:

$$W=\det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=5,$$

$$W_x=\det\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}=20, \qquad \text{a stąd} \qquad \begin{array}{l} x=\frac{W_x}{W}=4, \\ y=\frac{W_y}{W}=4, \end{array} \qquad \text{czyli} \quad B(4,4).$$

$$W_y=\det\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=20,$$

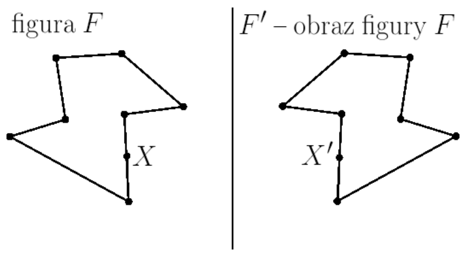
Ostatecznie wektor $\vec{v}$ ma współrzędne $\overrightarrow{AB}=[4-(-2),4-2]=[6,2]$.

Rozdział 6

Przekształcenia płaszczyzny

6.1 Przykłady przekształceń

Już w szkole spotkaliśmy się z pewnymi przekształceniami figur, np. symetria osiowa pewnej figury F przedstawiona na rysunku obok. Każdy punkt X tej figury ma przyporządkowany pewien punkt X' zwany obrazem punktu X. Zajmiemy się jednak nie tyle przekształcaniem figur, co przekształceniami całej płaszczyzny.



Definicja 6.1.1. Przekształceniem płaszczyzny nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi X płaszczyzny pewnego punktu X' płaszczyzny.

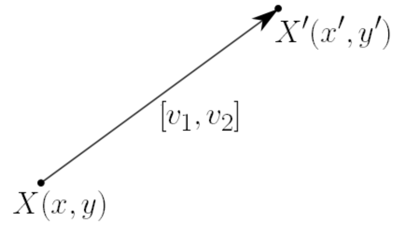
Obraz punktu $X(x, y)$ będziemy oznaczać przez $X'(x', y')$.
Jeśli T jest przekształceniem, to zapiszemy $T(X) = X'$ lub $T(x, y) = (x', y')$.
Możemy zapisać **wzór przekształcenia** T:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}, \tag{6.1.1}$$

gdzie $f(x, y)$ i $g(x, y)$ są pewnymi wyrażeniami zawierającymi x i y. Będzie to oznaczać, że obraz X' punktu $X(x, y)$ ma współrzędne $\big(f(x, y),\ g(x, y)\big)$, czyli $T(x, y) = \big(f(x, y),\ g(x, y)\big)$.

Omówimy teraz kilka przykładów przekształceń płaszczyzny wyprowadzając ich wzory.

6.1.2. Przesunięcie (translacja) o wektor $\vec{v} = [v_1, v_2]$



Translacja o wektor $\vec{v}$ (zwany wektorem przesunięcia) to takie przekształcenie, które każdemu punktowi $X(x, y)$ płaszczyzny przyporządkowuje punkt $X'(x', y')$ taki, że wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest równy wektorowi przesunięcia $\vec{v}$. Możemy zatem zapisać równość współrzędnych tych wektorów:

$$[v_1, v_2] = [x' - x,\ y' - y].$$

Traktując współrzędne (x, y) oraz współrzędne wektora $[v_1, v_2]$ jako dane, wyliczamy stąd współrzędne (x', y'):

$$\begin{aligned} x' &= x + v_1 \\ y' &= y + v_2 \end{aligned} .$$

Otrzymaliśmy wzór przesunięcia:

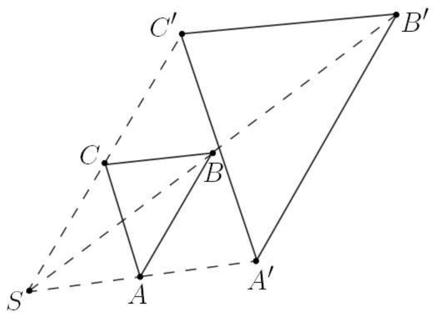
$$\Diamond \qquad \begin{cases} x' = x + v_1 \\ y' = y + v_2 \end{cases} \qquad \Diamond \tag{6.1.2}$$

Wektorowo możemy go zapisać: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, lub krócej: $X' = X + \vec{v}$.

6.1.3. Jednokładność o środku w punkcie S i skali k

To przekształcenie każdemu punktowi $X(x, y)$ przyporządkowuje taki punkt $X'(x', y')$, aby zachodziła zależność

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}.$$



Rysunek obok przedstawia trójkąt ABC i jego obraz wyznaczony przez jednokładność o środku S i skali $k = 2$.

Wyprowadzimy teraz ogólny wzór jednokładności o środku $S(x_0, y_0)$ i skali k. Wstawiamy współrzędne wektorów do zależności $\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$:

$$[x' - x_0, y' - y_0] = k \cdot [x - x_0, y - y_0].$$

Stąd mamy równości $x' - x_0 = k(x - x_0)$, $\ y' = k(y - y_0)$ i możemy zapisać wzór przekształcenia:

$$\Diamond \qquad \begin{cases} x' = k(x - x_0) + x_0 \\ y' = k(y - y_0) + y_0 \end{cases} \qquad \Diamond \tag{6.1.3}$$

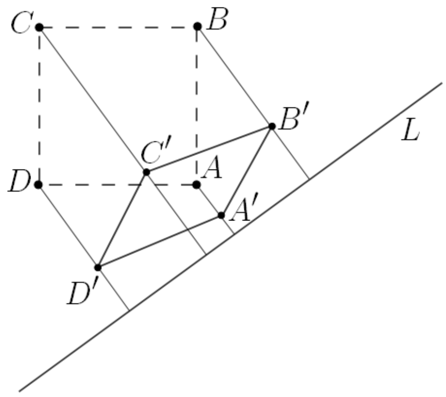
lub też wektorowo: $X' = k(X - S) + S$.

Uwaga 6.1.4. Dla skali $k = -1$ jednokładność to po prostu symetria środkowa względem punktu S.

6.1.5. Powinowactwo prostokątne o osi L i skali k

Obrazem punktu X przez to przekształcenie jest punkt X' taki, że

$$\overrightarrow{X_0X'} = k \cdot \overrightarrow{X_0X},$$



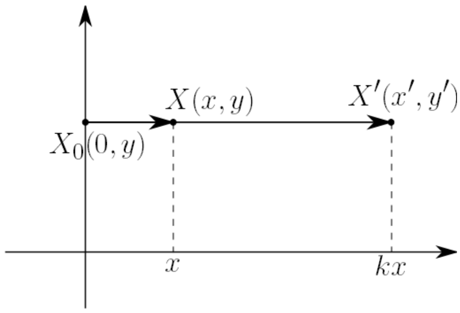
gdzie X_0 jest rzutem prostokątnym X na oś L. Na rysunku obok widzimy obraz kwadratu $ABCD$ przez powinowactwo prostokątne o skali $k = \frac{1}{3}$ i osi L. My jednak zajmiemy się tylko pewnymi przypadkami, a mianowicie, gdy prosta L pokrywa się z osiami współrzędnych.

Poniżej wyprowadzony jest wzór na powinowactwo prostokątne względem osi Oy i o skali k, a rysunek przedstawia tę sytuację.
Wiemy, że $\overrightarrow{X_0X'} = k \cdot \overrightarrow{X_0X}$, a także obliczamy, że

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X_0X'} &= [x', y' - y], \\ \overrightarrow{X_0X} &= [x, y - y] = [x, 0]. \end{aligned}$$

Mamy zatem $[x', y'-y] = k \cdot [x, 0]$, a stąd dostajemy ostateczny wzór:

$$\Diamond \qquad \begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases} . \qquad \Diamond \tag{6.1.4}$$



Analogicznie postępuje się w przypadku powinowactwa prostokątnego względem osi Ox i skali k. Wzór jest wtedy następujący:

$$\Diamond \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} . \qquad \Diamond \tag{6.1.5}$$

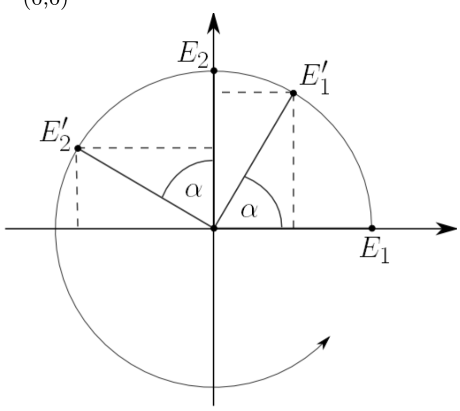
Uwaga 6.1.6. Dla $k = -1$ powinowactwo prostokątne jest symetrią osiową względem prostej L.

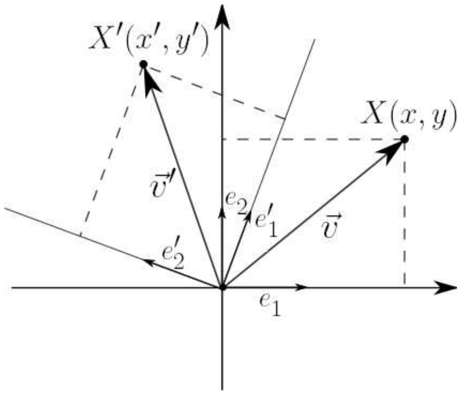
6.1.7. Obrót

Przez obrót będziemy rozumieć obrót wokół $(0, 0)$ o kąt α w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Oznaczamy go przez $R^{\alpha}_{(0,0)}$.

Wyprowadźmy teraz wzór tego przekształcenia. Oznaczmy odpowiednio przez E_1, E_2 punkty, których wektory wodzące to wersory e_1, e_2. Współrzędne tych punktów oraz ich obrazów E_1', E_2' są następujące:

$$\begin{aligned} E_1 = (1, 0), \quad E_1' &= (\cos\alpha,\ \sin\alpha), \\ E_2 = (0, 1), \quad E_2' &= \big(\cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha),\ \sin(\tfrac{\pi}{2} + \alpha)\big) = \\ &= (-\sin\alpha,\ \cos\alpha). \end{aligned}$$





Rysunek po lewej stronie przedstawia punkt X i jego obraz X' po obrocie. Są także zaznaczone wersory oraz wektory wodzące punktów E_1', E_2' oznaczone odpowiednio przez e_1', e_2', które to mają współrzędne takie, jak wymienione wcześniej punkty. Wektor wodzący $\vec{v}$ punktu X rozkładamy względem wersorów:

$$\vec{v} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}.$$

Z rysunku możemy wywnioskować, że współczynniki rozkładu wektora $\vec{v}'$ (będącego wektorem wodzącym X') względem $\vec{e_1}', \vec{e_2}'$ będą takie, jak w rozkładzie $\vec{v}$ względem $\vec{e_1}, \vec{e_2}$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= x \cdot \vec{e_1}' + y \cdot \vec{e_2}' = \\ &= x \cdot [\cos\alpha, \sin\alpha] + y \cdot [-\sin\alpha, \cos\alpha] = \\ &= [x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha]. \end{aligned}$$

Jak wiemy, współrzędne wektora $\vec{v}'$ są równe współrzędnym punktu X', zatem mamy ogólny wzór na obrót $R^{\alpha}_{(0,0)}$:

$$\Diamond \qquad \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}. \qquad \Diamond \tag{6.1.6}$$

Przykład 6.1.8. Wyznaczmy współrzędne obrazu punktu $(2, -2)$ po obrocie o kąt $\frac{2}{3}\pi$. Aby to zrobić, musimy znać wzór tego przekształceniana. Wiemy, że

$$\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

zatem wzór obrotu $R^{\frac{2}{3}\pi}_{(0,0)}$ jest następujący:

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}.$$

Możemy już wyznaczyć współrzędne obrazu punktu $(2, -2)$:

$$R^{\frac{2}{3}\pi}_{(0,0)}(-2, 2) = \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-2),\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot (-2)\right) = (\sqrt{3} - 1,\ \sqrt{3} + 1).$$

Poniższe ćwiczenie pokazuje jak rozpoznać, mając wzór przekształcenia, czy jest ono obrotem, czy nie.

Ćwiczenie 6.1.9. Czy przekształcenie $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}y \\ y' = \frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y \end{cases}$ jest obrotem?

Rozwiązanie:

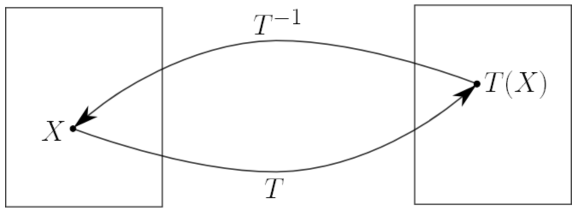
Jeśli byłby to obrót, to dla pewnego α prawdą by było, że $\frac{2}{3} = \cos\alpha$, $\frac{\sqrt{5}}{3} = \sin\alpha$. Sprawdźmy, czy istnieje takie α podstawiając te wartości do jedynki trygonometrycznej.

$$\frac{2}{3}^2 + \frac{\sqrt{5}}{3}^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{9}^2 + \frac{5}{9}^2 = 1$$

Równość jest spełniona, więc to przekształcenie jest obrotem o kąt $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$, czyli taki kąt α, dla którego cosinus jest równy $\frac{2}{3}$. Z tablic trygonometrycnych, bądź za pomocą kalkulatora, możemy podać przybliżoną wartość $\alpha = 48°$.

6.2 Przekształcenia odwrotne

Definicja 6.2.1. Przekształcenie odwrotne do T to takie przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi postaci $T(X)$ przyporządkowuje punkt X. Oznaczamy je przez T^{-1}.



Zwróćmy uwagę na to, że nie zawsze istnieje przekształcenie odwrotne do danego.

Uwaga 6.2.2. Przekształcenie odwrotne T^{-1} nie istnieje, gdy:

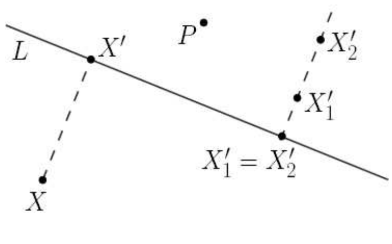
- T nie jest „na". Istnieje bowiem wtedy taki punkt (punkty), który nie jest obrazem żadnego punktu płaszczyzny, a więc przy przekształceniu odwrotnym nie mamy mu co przyporządkować.
- T nie jest różnowartościowe. Wtedy mamy sytuację, gdy dwa różne punkty mają ten sam obraz P. Jeśli chcielibyśmy ustalić T^{-1}, to dla punktu P nie wiadomo który z punktów należałoby przyporządkować.

Okazuje się, że poza wymienionymi powyżej przypadkami, pozostałe przekształcenia posiadają przekształcenia odwrotne. Mówi o tym następujący fakt (przytoczony tutaj bez dowodu).

Fakt 6.2.3. *Jeśli przekształcenie T jest wzajemne jednoznaczne (czyli różnowartościowe i „na"), to T^{-1} istnieje.*

Przykład 6.2.4. Rozważmy rzut prostokątny na prostą L. To przekształcenie nie posiada odwrotnego z obu wymienionych wyżej powodów:

- nie jest „na", bo obrazy punktów leżą tylko na prostej L i punkty P spoza tej prostej nie są obrazami żadnych punktów płaszczyzny;
- nie jest róznowartościowe, bo różne punkty (leżące na tej samej prostej prostopadłej do L) mają te same obrazy.



Poprzedni przykład dotyczył przypadku, kiedy nie było przekształcenia odwrotnego do danego. Teraz podamy przykłady przekształceń posiadających przekształcenie odwrotne oraz sposób, jak je wyliczyć.

Przykład 6.2.5. Wyznaczmy przekształcenie odwrotne T^{-1}, gdy:

a) T jest powinowactwem prostokątnym o skali k i osi Ox.

Zapisujemy wzór we współrzędnych (6.1.5): $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$.

Stąd wyznaczamy współrzędne punktu (x, y), który jest obrazem punktu (x', y') przez przekształcenie T^{-1}: $\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{y'}{k} \end{cases}$.

Te współrzędne określają już szukane przekształcenie. Należy tylko zamienić oznaczenia, tzn. w miejsce x' podstawić x i odwrotnie (to samo dla y i y'). Dostajemy więc wzór T^{-1}:

$$T^{-1}(x, y) = \left(x, \frac{1}{k}y\right).$$

Jest to powinowactwo prostokątne o skali $\frac{1}{k}$ i osi Ox.

b) T jest jednokładnością o środku S i skali k.

Tym razem przekształcenie odwrotne wyznaczymy ze wzoru wektorowego:

$$T(X) = X' = k(X - S) + S.$$

Wyliczmy punkt X, który jest obrazem punktu X' przez T^{-1}:

$$\begin{gathered} k(X - S) = X' - S \\ X = \tfrac{1}{k}(X' - S) + S. \end{gathered}$$

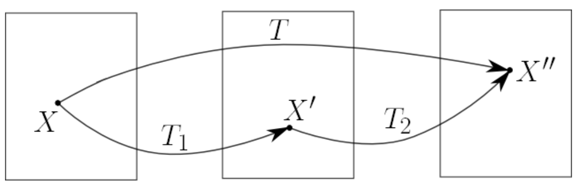
Zamieniając rolami X' z X otrzymujemy, że przekształcenie odwrotne do T jest dane wzorem:

$$T^{-1}(X) = \frac{1}{k}(X - S) + S.$$

Z postaci tego wzoru wynika, że T^{-1} jest jednokładnością o środku S i skali $\frac{1}{k}$.

6.3 Składanie przekształceń

Złożeniem przekształceń T_1 z T_2 nazywamy przekształcenie $T = T_2 \circ T_1$ otrzymane przez wykonanie kolejno przekształceń: najpierw T_1, potem T_2.



Obrazem punktu X przez złożenie $T_2 \circ T_1$ jest punkt X'' będący obrazem przez T_2 punktu X', który jest obrazem X przez T_1. Możemy to zapisać:

$$T_2 \circ T_1(X) = T_2(T_1(X)) = X'' \quad \Leftrightarrow \quad T_1(X) = X' \text{ i } T_2(X') = X''.$$

Podamy teraz na przykładzie, jak znaleźć wzór złożenia danych przekształceń. Dla dowolnych innych złożeń wzory zawsze można wyznaczać podobną metodą.

Przykład 6.3.1. Mamy przekształcenia $T_1 : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$, $T_2 : \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = x - y \end{cases}$.
Znajdźmy wzór złożenia $T_2 \circ T_1$:

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(x, y) &= T_2\left(T_1(x, y)\right) = T_2\left(x + 1,\ y - 1\right) = \\ &= (2(x + 1) - 1,\ x + 1 - (y - 1)) = (2x + 1,\ x - y + 2). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór : $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$.

Czasem, gdy to możliwe, wygodniej jest posłużyć się postacią wektorową wzorów przekształceń tak, jak to przedstawia następny przykład.

Przykład 6.3.2. Znajdźmy złożenie $T_2 \circ T_1$ dwóch jednokładności: T_1 – o środku $(0, 0)$ i skali 4 oraz T_2 – o środku $S(4, -3)$ i skali $-\frac{1}{2}$.
Zapiszmy wzory tych przekształceń:

$$T_1(X) = 4 \cdot X, \qquad T_2(X) = -\tfrac{1}{2}\left(X - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Podstawmy teraz kolejno:

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(X) &= T_2\big(T_1(X)\big) = T_2(4X) = \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(4X - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= -\left(2X + \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= -2X + \begin{pmatrix} 6 \\ -4\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jest to jednokładność o skali -2 i środku S, który teraz wyznaczymy:

$$-2X + \begin{pmatrix} 6 \\ -4\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -2(X - S) + S$$
$$-2X + \begin{pmatrix} 6 \\ -4\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -2X + 3S$$
$$\begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = 3S, \quad \text{stąd} \quad S = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Złożenie $T_2 \circ T_1$ jest jednokładnością o skali -2 i środku $(2, -\frac{3}{2})$.

Wspomnijmy jeszcze na koniec o pewnym specjalnym przekształceniu płaszczyzny.

Definicja 6.3.3. **Przekształceniem tożsamościowym** I (inaczej **identycznością**) nazywamy takie przekształcenie, które każdemu punktowi X przyporządkowuje ten sam punkt X. Możemy zatem zapisać matematycznie, że:

$$\forall X \; I(X) = X.$$

Uwaga 6.3.4. Wykorzystując przekształcenie tożsamościowe możemy podać inny, równoważny sposób zdefiniowania przekształcenia odwrotnego do T. Jest to takie przekształcenie Q, że:

$$Q \circ T = I \quad \text{oraz} \quad T \circ Q = I.$$

Uzasadnienie, że ta definicja jest równoważna Definicji 6.2.1 pomijamy.

6.4 Równanie obrazu krzywej

Mamy daną krzywą γ o równaniu $F(x, y) = 0$ oraz wzajemnie jednoznaczne przekształcenie T dane wzorem $T(x, y) = \big(f(x, y), g(x, y)\big)$. Zauważmy, że punkt X należy do obrazu $T(\gamma)$ krzywej wtedy i tylko wtedy, gdy obraz tego punktu przez przekształcenie odwrotne T^{-1} należy do krzywej γ, a to z kolei oznacza, że spełnia on równanie krzywej. Warunki te zapisane są poniżej:

$$X \in T(\gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad T^{-1}(X) \in \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad F\big(T^{-1}(X)\big) = 0.$$

Zgodnie z tym, co napisaliśmy, aby znaleźć równanie obrazu $\gamma' = T(\gamma)$ należy:

1. wyprowadzić wzór na przekształcenie odwrotne:

$$(x, y) = T^{-1}(x', y') = \big(f'(x', y'), g'(x', y')\big), \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = f'(x', y') \\ y = g'(x', y') \end{cases};$$

2. wstawić do wzoru krzywej γ wyznaczone poprzednio wyrażenia na x i y:

$$F(x, y) = F\big(f'(x', y'), g'(x', y')\big) = 0;$$

3. podstawić za x', y' odpowiednio x i y:

$$F\big(f'(x, y), g'(x, y)\big) = 0.$$

Powstałe w ten sposób równanie jest równaniem obrazu krzywej γ.

Poniższy przykład pokazuje, jak dla konkretnej krzywej znaleźć równanie jej obrazu przez dane przekształcenie płaszczyzny stosując powyższe kroki postępowania.

Przykład 6.4.1. Znajdźmy równanie obrazu okręgu $x^2 + y^2 = 4$ przez powinowactwo T o skali 3 względem osi Oy.
Ze wzoru na przekształcenie T wyliczamy przekształcenie odwrotne T^{-1}:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}x' \\ y = y' \end{cases} .$$

Następnie wstawiamy do równania okręgu i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{1}{3}x'\right)^2 + (y')^2 = 4 \\ &\left(\tfrac{1}{6}x'\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}y'\right)^2 = 1 \\ &\left(\tfrac{x}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{2}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Krzywa o takim równaniu to elipsa o półosiach 6 i 2.

Czasami nie warto wyprowadzać wzoru na przekształcenie odwrotne do danego wyliczając je niekiedy ze skomplikowanych równań. Można bowiem zastanowić się czym jest przekształcenie odwrotne i zapisać wprost wzór na nie. W ten sposób rozwiązane jest poniższe ćwiczenie.

Ćwiczenie 6.4.2. Znajdź równanie obrazu krzywej $y^2 - x^2 = \frac{1}{2}$ po obrocie o kąt $\frac{\pi}{3}$.
ROZWIĄZANIE:
Chcąc wyliczać ze wzoru na obrót wzór przekształcenia odwrotnego należałoby rozwiązać poniższy układ równań ze względu na x i y:

$$\begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{3} - y\sin\frac{\pi}{3} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{3} + y\cos\frac{\pi}{3} \end{cases} .$$

Rachunki wtedy by były skomplikowane. Wystarczy jednak zauważyć, że przekształcenie odwrotne do obrotu o kąt α jest obrotem o kąt $-\alpha$. Wyraża się ono wzorem:

$$\begin{cases} x = x'\cos(-\alpha) - y'\sin(-\alpha) \\ y = x'\sin(-\alpha) + y'\cos(-\alpha) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} .$$

Wtedy dla $\alpha = \frac{\pi}{3}$ otrzymujemy wzór: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$. Wstawiając x i y do równania krzywej mamy:

$$\begin{gathered} \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2}x'^2 - \tfrac{1}{2}y'^2 - \sqrt{3}x'y' = \tfrac{1}{2}. \end{gathered}$$

Podstawiając na koniec x, y za x' i y' możemy zapisać ostatecznie równanie obrazu krzywej $y^2 - x^2 = \frac{1}{2}$ przez obrót o $\frac{\pi}{3}$: $\quad x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy = 1$.

Rozdział 7

Przekształcenia liniowe

7.1 Definicja przekształcenia liniowego

Przekształcenie płaszczyzny to pojęcie bardzo szerokie. Wśród przekształceń wyróżniamy zatem pewne ich grupy spełniające określone warunki. W tym rozdziale zajmiemy się przekształceniami liniowymi.

Definicja 7.1.1. Przekształcenie płaszczyzny T nazywamy **przekształceniem liniowym** jeśli:

(1) punkt $(0,0)$ przechodzi przez T na samego siebie, czyli $T(0,0) = (0,0)$;

(2) T zachowuje kombinację liniową wektorów wodzących, tzn. jeśli X', Y', Z' są obrazami punktów X, Y, Z przez T i mamy rozkład w kombinację liniową:

$$\overrightarrow{OZ} = t \cdot \overrightarrow{OX} + s \cdot \overrightarrow{OY},$$

gdzie t i s są współczynnikami rozkładu, to te same współczynniki będą również występowały w rozkładzie:

$$\overrightarrow{OZ'} = t \cdot \overrightarrow{OX'} + s \cdot \overrightarrow{OY'}.$$

Przekształceniem liniowym jest np. obrót o dowolny kąt wokół punktu $(0,0)$ (patrz punkt 6.1.7). Inne przykłady podamy w dalszej części tego rozdziału.

Zbadajmy teraz, co dzieje się w przypadku rozkładu wektora wodzącego pewnego punktu $Z(x,y)$ w kombinację liniową wektorów wodzących punktów $E_1 = (1,0)$, $E_2 = (0,1)$, czyli wersorów. Zauważmy, że współczynnikami takiego rozkładu są współrzędne punktu Z:

$$\overrightarrow{OZ} = [x,y] = x \cdot [1,0] + y \cdot [0,1] = x \cdot \overrightarrow{OE_1} + y \cdot \overrightarrow{OE_2}.$$

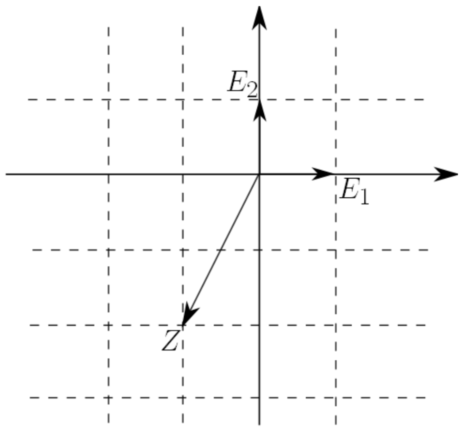
Przekształcenie liniowe T zachowa współczynniki kombinacji liniowej. W tym przypadku będą to nadal współrzędne punktu Z. Zatem, jeśli $T(Z) = Z'$, $T(E_1) = E_1'$, $T(E_2) = E_2'$, to mamy

$$\overrightarrow{OZ'} = x \cdot \overrightarrow{OE_1'} + y \cdot \overrightarrow{OE_2'}.$$

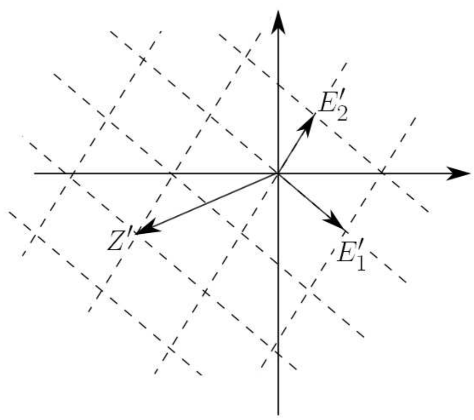
Zwróćmy uwagę, że jeśli będziemy znać współrzędne wektorów $\overrightarrow{OE_1'}, \overrightarrow{OE_2'}$ (równe współrzędnym punktów E_1', E_2'), to obliczymy współrzędne punktu Z', bo x i y to współrzędne punktu Z i traktujemy jako dane. Z powyższych roważań wynika następująca uwaga.

Uwaga 7.1.2. Znając obrazy punktów $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$ przez przekształcenie liniowe T, możemy wyznaczyć jednoznacznie obrazy pozostałych punktów płaszczyzny przez to przekształcenie.

Dla przykładu rysunki poniżej ilustrują rozkłady w kombinację liniową wektorów wodzących: po lewej punktu $Z(-1,-2)$, po prawej obrazu tego punktu przez przekształcenie T. Narysowane są również siatki wyznaczone przez wektory wodzące punktów E_1, E_2 i odpowiednio ich obrazów E_1', E_2'. Dzięki temu łatwo zaznaczyć dany punkt znając współczynniki rozkładu w kombinacje liniowe względem tych wektorów.



$\overrightarrow{OZ} = -1 \cdot \overrightarrow{OE_1} + (-2) \cdot \overrightarrow{OE_2}$



$\overrightarrow{OZ'} = -1 \cdot \overrightarrow{OE_1'} + (-2) \cdot \overrightarrow{OE_2'}$

Przykład 7.1.3. Znajdźmy obrazy punktów $A(-2,0)$, $B(1,1)$, $C(0,0)$ przez przekształcenie liniowe T, przeprowadzające wersory $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ odpowiednio na wektory $[-1,2], [0,-3]$.
Zgodnie z definicją punkt $(0,0)$ przechodzi na siebie przez przekształcenie liniowe, więc $T(C) = C' = (0,0)$. Pamiętając o tym, że współrzędne wektora wodzącego punktu są równe współrzędnym tego wektora, zapiszemy rozkłady wektorów wodzącch punktów A i B jako kombinacje liniowe wersorów:

$$\overrightarrow{OA} = [-2,0] = -2 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2},$$
$$\overrightarrow{OB} = [1,1] = 1 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2}.$$

Korzystamy z tego, że T zachowuje kombinację liniową, zatem:

$$\overrightarrow{OA'} = -2 \cdot T(\vec{e_1}) + 0 \cdot T(\vec{e_2}) = -2 \cdot [-1,2] = [2,-4],$$
$$\overrightarrow{OB'} = 1 \cdot T(\vec{e_1}) + 1 \cdot T(\vec{e_2}) = [-1,2] + [0,-3] = [-1,-1].$$

Szukane punkty to $A' = (2,-4)$, $B' = (-1,-1)$, $C' = (0,0)$.

7.2 Wzór przekształcenia liniowego

Wyliczymy teraz jakim ogólnym wzorem wyrażają się przekształcenia liniowe. Zgodnie z Uwagą 7.1.2, aby jednoznacznie określić współrzędne obrazów wszystkich punktów, wystarczy znać obrazy punktów $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$. Przyjmijmy, że mają one współrzędne:

$$E_1' = (a,b), \qquad E_2' = (c,d).$$

Zatem ich wektory wodzące to $\overrightarrow{OE_1'} = [a,b]$, $\overrightarrow{OE_2'} = [c,d]$. Ustalmy również dowolny punkt $Z(x,y)$. Będziemy szukać punktu $Z'(x',y')$, czyli obrazu Z przez dane przekształcenie liniowe T. Wiemy z definicji, że T zachowuje kombinację liniową wektorów wodzących, zatem:

$$\begin{aligned}[x',y'] &= \overrightarrow{OZ'} = x\cdot\overrightarrow{OE_1'} + y\cdot\overrightarrow{OE_2'} = \\ &= x\cdot[a,b] + y\cdot[c,d] = [ax,bx]+[cy,dy] = \\ &= [ax+cy, bx+dy].\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób ogólny **wzór przekształcenia liniowego**:

$$\Diamond \qquad \begin{cases} x' = ax+cy \\ y' = bx+dy \end{cases}, \qquad \Diamond \tag{7.2.1}$$

gdzie a,b,c,d są stałymi współczynnikami związanymi z przekształceniem.

Uwaga 7.2.1. Wzór $\begin{cases} x' = ax+cy \\ y' = bx+dy \end{cases}$ możemy traktować jako definicję przekształcenia liniowego, równoważną Definicji 7.1.1.

Uwaga 7.2.2. We wzorze (7.2.1) współczynniki przy niewiadomej x to współrzędne punktu E_1', zaś przy y to współrzędne E_2'.

W niektórych przypadkach, mając odpowiednie dane, łatwo możemy znajdować wzory przekształceń liniowych korzystając z powyższej uwagi. Pokazuje to następujący przykład.

Przykład 7.2.3. Wiemy, że $T(1,0) = (2,\frac{1}{2})$ i $T(0,1) = (-3,\frac{2}{3})$ dla pewnego przekształcenia liniowego T. Możemy bez trudu zapisać wzór tego przekształcenia wstawiając współrzędne obrazu $T(1,0)$ jako współczynniki przy x, a współrzędne $T(0,1)$ przy y:

$$\begin{cases} x' = 2x-3y \\ y' = \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y \end{cases}.$$

Definicja 7.2.4. Macierz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ utworzona ze współczynników równania przekształcenia liniowego nazywamy **macierzą przekształcenia liniowego**.

Przykład 7.2.5. Przekształcenie liniowe o macierzy $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ to przekształcenie dane wzorem $\begin{cases} x' = -x+3y \\ y' = 6x-3y \end{cases}$.

7.3 Przykłady przekształceń liniowych

Wymienimy kilka przykładów przekształceń liniowych podając ich wzory i macierze przekształceń.

7.3.1. Obroty wokół $(0,0)$ **o dowolny kąt** α

Wzór na obrót wyprowadzaliśmy w rozdziale poprzednim (punkt 6.1.7):

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}.$$

Wzór tego przekształcenia jest zgodny z postacią ogólną (7.2.1) dla współczynników $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha, c = -\sin\alpha, d = \cos\alpha$. Zatem macierz obrotu o kąt α to:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

7.3.2. Jednokadność o środku w punkcie $(0,0)$ **i skali** k

Dla dowolnego punktu $X(x,y)$ i jego obrazu $X'(x',y')$ przez to przekształcenie zachodzi równość:

$$\overrightarrow{OX} = k \cdot \overrightarrow{OX'},$$

z której otrzymujemy wzór: $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$, a także macierz $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

Jest to rzeczywiście przekształcenie liniowe, gdyż otrzymany wzór jest postaci (7.2.1) dla współczynników $a = k$, $b = 0$, $c = 0$, $d = k$.

7.3.3. Powinowactwo prostokątne o osi OX **i skali** k

Z poprzedniego rozdziału (punkt 6.1.5) wiemy, że to przekształcenie wyraża się wzorem

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}.$$

Jeśli we wzorze ogólnym (7.2.1) $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ i $d = k$, to otrzymamy wzór tego powinowactwa, a więc jest ono liniowe. Jego macierz to

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Dla każdej innej osi, ale przechodzącej przez punkt $(0,0)$ powinowactwo prostokątne o skali k jest przekształceniem liniowym.

7.3.4. Przekształcenie tożsamościowe

To przekształcenie przyporządkowuje każdemu punktowi płaszczyzny ten sam punkt, zatem wzór i macierz są następujące:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3.5. Przekształcenie zerowe

Przekształceniem zerowym nazywać będziemy odwzorowanie całej płaszczyzny w punkt $(0,0)$. Zatem dane jest ono wzorem

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}, \quad \text{lub równoważnie macierzą} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.4 Odwracalne przekształcenia liniowe

O przekształceniu, które posiada przekształcenie odwrotne będziemy mówić, że jest **odwracalne**. Jak wiemy z poprzedniego rozdziału (Fakt 6.2.3) nie zawsze istnieje przekształcenie odwrotne do danego. W przypadku przekształceń liniowych możemy wygodnie scharakteryzować, które z nich są odwracalne.

Fakt 7.4.1. *Niech T będzie przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, tzn. takie, że współrzędne wektorów wodzących punktów E_1', E_2' to $\overrightarrow{OE_1'} = [a, b]$, $\overrightarrow{OE_2'} = [c, d]$, gdzie E_1', E_2' są obrazami punktów $E_1 = (0, 1)$, $E_2 = (1, 0)$ przez T. Mamy wtedy następujące równoważności:*

$$T \textit{ jest odwracalne} \iff \textit{wektory } \overrightarrow{OE_1'} \textit{ i } \overrightarrow{OE_2'} \textit{ są niewspółliniowe} \iff$$

$$\iff \det\left(\overrightarrow{OE_1'}, \overrightarrow{OE_2'}\right) \neq 0 \iff \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dowód. Pokażemy tylko pierwszą równoważność, ponieważ dwie następne nie sprawiają problemów: druga wynika z własności wyznacznika pary wektorów (punkt 3.3.2), natomiast o trzeciej była mowa w Uwadze 5.2.1. Zajmijmy się więc pierwszą równoważnością dowodząc dwóch implikacji, z których się ona składa.

($\Leftarrow$) Zakładamy, że $\overrightarrow{OE_1'}$ i $\overrightarrow{OE_2'}$ są niewspółliniowe, zatem

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Pokażemy, że T jest odwracalne, czyli że istnieje przekształcenie odwrotne T^{-1}. Wzór na T^{-1} wyznaczymy ze wzoru przekształcenia T:

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}.$$

Przypomnijmy, że aby to zrobić, musimy najpierw wyznaczyć x i y a następnie zamienić rolami x z x' oraz y z y'. Powyższy układ równań rozwiążemy metodą wyznacznikową, by w ten sposób znaleźć x i y. Obliczmy wyznacznik główny tego układu:

$$W = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Z założenia mamy, że jest on niezerowy, zatem istnieje jedna para rozwiązań tego układu. Obliczamy wyznaczniki pomocnicze:

$$W_x = \det\begin{pmatrix} x' & c \\ y' & d \end{pmatrix} = x'd - cy', \qquad W_y = \det\begin{pmatrix} a & x' \\ b & y' \end{pmatrix} = ay' - bx'.$$

Możemy już wyznaczyć parę rowiązań:

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{x'd - cy'}{W} = \frac{d}{W}x' - \frac{c}{W}y',$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{ay' - bx'}{W} = -\frac{b}{W}x' + \frac{a}{W}y'.$$

Zamieniając odpowiednie litery otrzymujemy wzór na przekształcenie odwrotne:

$$\Diamond \qquad \begin{cases} x' = \frac{d}{W}x - \frac{c}{W}y \\ y' = -\frac{b}{W}x + \frac{a}{W}y \end{cases} . \qquad \Diamond \tag{7.4.1}$$

Pokazaliśmy więc, że przekształcenie odwrotne do T istnieje.

($\Rightarrow$) Zakładamy teraz, że T jest odwracalne, a chcemy pokazać, że wektory $\overrightarrow{OE_1'}$ i $\overrightarrow{OE_2'}$ są niewspółliniowe.

Wiemy, że skoro istnieje przekształcenie odwrotne do T, to T musi być w szczególności „na" (patrz Fakt 6.2.3). Oznacza to, że każdy punkt na płaszczyźnie jest obrazem jakiegoś punktu przez przekształcenie T. Symbolicznie zapisujemy to jako $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, gdzie $\mathbb{R}^2$ to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny.

Wiemy także, że skoro T jest liniowe, to $T(\mathbb{R}^2)$ składa się z takich punktów $Z'(x', y')$, że $\overrightarrow{OZ'} = x \cdot \overrightarrow{OE_1'} + y \cdot \overrightarrow{OE_2'}$.

Gdyby $\overrightarrow{OE_1'}$ i $\overrightarrow{OE_2'}$ były współliniowe, to powyższe kombinacje liniowe nie dałyby wszystkich wektorów na płaszczyźnie, a tylko te, które są również współliniowe z nimi.

Stąd wnioskujemy, że $\overrightarrow{OE_1'}$ i $\overrightarrow{OE_2'}$ muszą być niewspółliniowe.

Pokazaliśmy prawdziwość obu implikacji i to kończy dowód tego faktu. $\square$

Wniosek 7.4.2. Z dowodu powyższego faktu możemy wyciągnąć następujące wnioski prawdziwe dla dowolnego odwracalnego przekształcenia liniowego T:

- przekształcenie T^{-1} jest też liniowe;
- jeśli $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia T, to przekształcenie odwrotne jest zadane macierzą:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{W} & -\frac{c}{W} \\ -\frac{b}{W} & \frac{a}{W} \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } W = \det A.$$

Przykład 7.4.3. Przekształcenie liniowe o macierzy $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ jest odwracalne, bo $\det M = 2 \neq 0$. Macierz przekształcenia odwrotnego M^{-1} wyliczamy na podstawie powyższego wniosku:

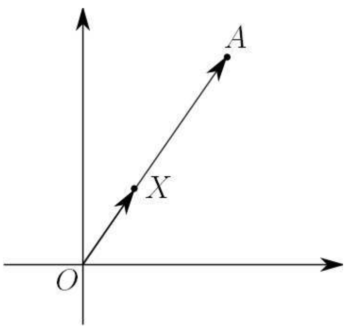
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{2} & \frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.5 Obraz odcinka i równoległoboku przez przekształcenie liniowe

W tym podrozdziale będziemy badać na co przez przekształcenie liniowe może przejść odcinek, czy też równoległobok rozpięty na dwóch wektorach. Najpierw jednak musimy ustalić pewien sposób zapisu tych obiektów, będzie to zapis parametryczny. Wyprowadzimy kolejno równania parametryczne odcinka i równoległoboku.

7.5.1. Równanie parametryczne odcinka

Zaczniemy od przypadku odcinka, którego jednym końcem jest początek układu współrzędnych.



Chcemy zapisać równaniem odcinek OA zaznaczony na rysunku. Punkt $X(x, y)$ jest pewnym punktem leżącym na tym odcinku. Widzimy, że wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OX}$ są liniowo zależne, dlatego dla pewnego t mamy

$$\overrightarrow{OX} = t \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Parametr t nie jest zupełnie dowolny, lecz z przedziału $[0, 1]$, bowiem dla zera dostajemy wektor zerowy, który pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, a kiedy t rośnie wektor $\overrightarrow{OX}$ jest coraz dłuższy, aż dla $t = 1$ będzie równy wektorowi $\overrightarrow{OA}$. W ten sposób wygenerowane zostaną wektory wodzące wszystkich punktów odcinka OA, które możemy utożsamiać z tymi punktami.

Jeśli $A = (a_1, a_2)$, to równanie parametryczne odcinka OA w postaci wektorowej jest następujące:

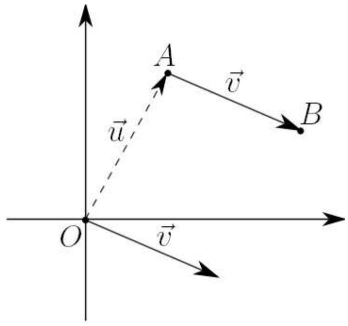
$$[x, y] = t[a_1, a_2], \qquad t \in [0, 1].$$

Może być zapisane także we współrzędnych: $\begin{cases} x = ta_1 \\ y = ta_2 \end{cases}$, gdzie $t \in [0, 1]$.

Jeśli natomiast oznaczymy $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, to odcinek możemy określić jako zbiór:

$$\{t\vec{v} : t \in [0, 1]\}.$$

Rozważmy teraz przypadek odcinka AB, którego żaden koniec nie jest początkiem układu współrzędnych, tak jak na rysunku obok. Oznaczmy $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Odcinek równoległy do AB przechodzący przez $(0, 0)$ ma równanie $\{t\vec{v} : t \in [0, 1]\}$. Natomiast szukany odcinek AB jest przesunięciem tego odcinka o wektor $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Zatem rówanie parametryczne odcinka ma postać:



$$\{\vec{u} + t\vec{v} : t \in [0, 1]\},$$

lub po prostu

$$\{A + t\vec{v} : t \in [0, 1]\}.$$

Jeśli $\vec{u} = [a_1, a_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$, to możemy zapisać także równanie we współrzędnych:

$$\begin{cases} x' = a_1 + tv_1 \\ y' = a_2 + tv_2 \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in [0, 1].$$

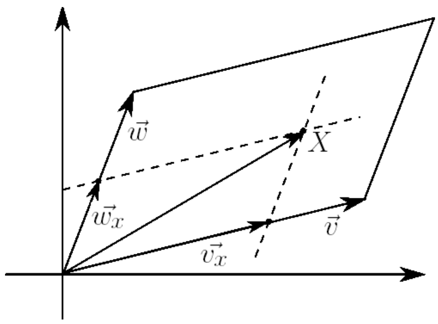
7.5.2. Równanie parametryczne równoległoboku

Dwa liniowo niezależne wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ wyznaczają na płaszczyźnie równoległobok. Zajmijmy się najpierw przypadkiem, gdy wektory te zaczepione są w punkcie $(0, 0)$.

Wektor wodzący dowolnego punktu X należącego do tego równoległoboku możemy przedstawić jako sumę wektorów:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{v_x} + \vec{w_x},$$

gdzie $\vec{v_x}$ i $\vec{w_x}$ są składowymi w rozkładzie wektora $\overrightarrow{OX}$ względem kierunków wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Przedstawia to rysunek obok.



Możemy zauważyć, że $\vec{v_x}$ jako wektor współliniowy z $\vec{v}$ i nie dłuższy niż $\vec{v}$, spełnia zależność:

$$\vec{v_x} = t \cdot \vec{v} \quad \text{dla pewnego} \quad t \in [0, 1].$$

Podobnie mamy:

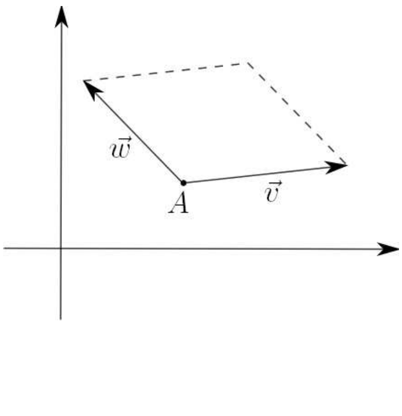
$$\vec{w_x} = s \cdot \vec{w} \quad \text{dla pewnego} \quad s \in [0, 1].$$

Zatem otrzymujemy, że każdy wektor wodzący punktu równoległoboku jest kombinacją liniową wektorów $\vec{v}, \vec{w}$ tworzących ten równoległobok:

$$\overrightarrow{OX} = t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}.$$

Równanie parametryczne równoległoboku zaczepionego w początku układu współrzędnych zapisujemy więc jako zbiór:

$$\{s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w} : \quad s, t \in [0, 1]\}.$$



W przypadku równoległoboku wyznaczonego przez wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zaczepione w punkcie A równanie parametryczne jest następujące:

$$\{A + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w} : \quad s, t \in [0, 1]\}.$$

7.5.3. Obraz odcinka

Niech przekształcenie liniowe T będzie dane wzorem: $T(x,y) = (ax+cy,\ bx+dy)$. Znajdziemy obraz przez T odcinka danego równaniem parametrycznym we współrzędnych:

$$(x,y) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2),\ \ t \in [0,1].$$

Podstawiając do wzoru przekształcenia T za zmienne x, y odpowiednie współrzędne odcinka otrzymujemy:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (a(a_1, tv_1) + c(a_2 + tv_2),\ b(a_1, tv_1) + d(a_2 + tv_2)) = \\ &= (aa_1 + a_2c + tav_1 + tcv_2,\ ba_1 + da_2 + tbv_1 + tdv_2) = \\ &= ((aa_1 + a_2c) + t(av_1 + cv_2),\ (ba_1 + da_2) + t(bv_1 + dv_2)) \,. \end{aligned}$$

Oznaczając kolejnymi literami A, B, C i D odpowiednie wyrażenia w nawiasach z powyższego zapisu mamy:

$$T(x,y) = (A + t \cdot B,\ C + t \cdot D) = (A, C) + t[B, D], \quad \text{gdzie } t \in [0,1].$$

Zatem obrazem odcinka przez przekształcenie liniowe T jest:

- odcinek o końcach w punktach o współrzędnych (A, C) i $(A+B, C+D)$ wtedy, gdy $[B, D] \neq [0,0]$;
- punkt (A, C), gdy $[B, D] = [0,0]$.

7.5.4. Obraz równoległoboku

Wyznaczmy teraz w podobny sposób obraz równoległoboku danego równaniem

$$\begin{aligned} (x,y) &= (a_1, a_2) + t[v_1, v_2] + s[w_1, w_2] = \\ &= (a_1 + tv_1 + sw_1,\ a_2 + tv_2 + sw_2), \quad t, s \in [0,1] \end{aligned}$$

przez przekształcenie liniowe T o wzorze: $T(x,y) = (ax+cy,\ bx+dy)$.
Wyliczymy kolejno współrzędne $(x', y') = T(x,y)$ obrazu równoległoboku:

$$\begin{aligned} x' &= a(a_1 + tv_1 + sw_1) + c(a_2 + tv_2 + sw_2) = \\ &= aa_1 + ca_2 + t(av_1 + cv_2) + s(aw_1 + cw_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= b(a_1 + tv_1 + sw_1) + d(a_2 + tv_2 + sw_2) = \\ &= ba_1 + da_2 + t(bv_1 + dv_2) + s(bw_1 + dw_2). \end{aligned}$$

Podstawiając stałe $A_x, B_x, C_x, A_y, B_y, C_y$ za odpowiednie wyrażenia możemy zapisać:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (A_x + tB_x + sC_x,\ A_y + tB_y + sC_y) = \\ &= (A_x, A_y) + t[B_x, B_y] + s[C_x, C_y], \quad \text{dla } t, s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem, że obrazem równoległoboku przez przekształcenie liniowe jest:

- równoległobok zbudowany na wektorach $[B_x, B_y]$ i $[C_x, C_y]$ zaczepionych w punkcie (A_x, A_y), jeśli tylko wektory te są liniowo niezależne,
- punkt lub odcinek wtedy, gdy wektory $[B_x, B_y]$ i $[C_x, C_y]$ są liniowo zależne.

Rozdział 8

Przekształcenia afiniczne, izometrie, podobieństwa

8.1 Definicja i przykłady przekształceń afinicznych

Kolejnymi rodzajami przekształceń, jakie omówimy, będą przekształcenia afiniczne, a w dalszej części ich szczególne przypadki: izometrie i podobieństwa.

Definicja 8.1.1. **Przekształcenie afiniczne** S to takie przekształcenie płaszczyzny, które jest złożeniem pewnego przekształcenia liniowego L z pewną translacją T. Translację tę nazywamy **częścią translacyjną**, a przekształcenie L **częścią liniową** przekształcenia $S = T \circ L$.

Uwaga 8.1.2. Każde przekształcenie liniowe jest afiniczne, jako złożenie tego przekształcenia liniowego i translacji o wektor zerowy.

8.1.3. Wzór przekształcenia afinicznego

Wyprowadźmy wzór przekształcenia afinicznego S złożonego z przekształcenia liniowego L danego macierzą $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (zwaną **macierzą części liniowej** przekształcenia S) oraz z translacji T o wektor $[p, q]$. Wzory przekształceń składowych to odpowiednio

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}.$$

Wyliczamy współrzędne obrazu punktu $X(x, y)$ przez złożenie $T \circ L = S$:

$$S(X) = T \circ L(X) = T(L(x, y)) = T\begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy + p \\ bx + dy + q \end{pmatrix}.$$

Ostatecznie otrzymujemy ogólny wzór:

$$\diamondsuit \qquad \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}. \qquad \diamondsuit \tag{8.1.1}$$

Uwaga 8.1.4. Wykorzystując powyższy wzór możemy sformułować definicję przekształcenia afinicznego równoważną do Definicji 8.1.1. Mówimy, że przekształcenie wyrażające się wzorem postaci (8.1.1) jest przekształceniem afinicznym. Ponadto macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ utworzona z odpowiednich współczynników występujących w tym wzorze jest macierzą części liniowej tego przekształcenia afinicznego, zaś współczynniki p i q tworzą współrzędne wektora przesunęcia $[p, q]$ części translacyjnej. Dowód równoważności obu definicji pomijamy.

Przykład 8.1.5. Przekształcenie o wzorze $\begin{cases} x' = x + 2y - 1 \\ y' = 4y + 3 \end{cases}$ jest afiniczne. Macierz części liniowej to $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, natomiast część translacyjna to translacja o wektor $[-1, 3]$.

Przykładami przekształceń afinicznych są:
- obroty o dowolne kąty,
- wszystkie translacje,
- powinowactwa o dowolnych osiach i skalach,
- jednokładności o dowolnych skalach i środkach w dowolnych punktach,
- rzuty na dowolne proste,
- przekształcenia będące złożeniami powyższych.

Aby uzasadnić, że wymienione wyżej przekształcenia są afiniczne moglibyśmy wyprowadzić dla każdego z nich wzór i doprowadzić go do postaci (8.1.1), którą zgodnie z Uwagą 8.1.4 traktujemy jako definicję przekształcenia afinicznego. Jednak rachunki te pomijamy, za to pokażemy, że przekształcenie będące złożeniem przekształceń afinicznych jest też afiniczne.

Fakt 8.1.6. *Złożenie przekształceń afinicznych jest też afiniczne.*

Dowód. Niech S_2, S_2 będą przekształceniami afinicznymi o wzorach odpowiednio

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + p_1 \\ y' = c_1x + d_1y + p_1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x' = a_2x + b_2y + q_2 \\ y' = c_2x + d_2y + q_2 \end{cases}.$$

Pokażemy, że złożenie $S_1 \circ S_2$ jest przekształceniem afinicznym. Wyliczmy współrzędne obrazu punktu $X = (x, y)$ przez to złożenie:

$$\begin{aligned} S_1 \circ S_2(X) &= S_1\big(S_2(X)\big) = S_1 \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + p_1 \\ c_1x + d_1y + q_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_2(a_1x + b_1y + p_1) + b_2(c_1x + d_1y + q_1) + p_2 \\ c_2(a_1x + b_1y + p_1) + d_2(c_1x + d_1y + q_1) + q_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_2a_1x + a_2b_1y + a_2p_1 + b_2c_1x + b_2d_1y + b_2q_1 + p_2 \\ c_2a_1x + c_2b_1y + c_2p_1 + d_2c_1x + d_2d_1y + d_2q_1 + q_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_2a_1 + b_2c_1)x + (a_2b_1 + b_2d_1)y + (a_2p_1 + b_2p_1 + p_2) \\ (c_2a_1 + d_2c_1)x + (c_2b_1 + d_2d_1)y + (c_2p_1 + d_2q_1 + q_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Przekształcenie $S_1 \circ S_2$ wyraża się zatem wzorem:

$$\begin{cases} x' = Ax + By + P \\ y' = Cx + Dy + Q \end{cases},$$

gdzie A, B, C, D, P, Q są odpowiednimi współczynnikami, które dostajemy z powyższych obliczeń. Łatwo zauważyć, że wzór ten zgadza się ze wzorem ogólnym (8.1.1) przeksztaceń afinicznych, stąd wniosek, że złożenie $S_1 \circ S_2$ jest afiniczne. □

Uwaga 8.1.7. Rachunki przedstawione w powyższym dowodzie możemy nieco uprościć stosując wzór na przekształcenie afiniczne $S = T \circ L$ w krótszej formie: $S(X) = L(X) + V$, gdzie V jest wektorem przesunięcia translacji T. Wtedy dowód Faktu 8.1.6 jest następujący. Jeśli $S_1 = L_1(X) + V_1$, $S_2 = L_2(X) + V_2$, to

$$S_1 \circ S_2 = S_1\big(S_2(X)\big) = L_1\big(S_2(X)\big) + V_1 = L_1\big(L_2(X) + V_2\big) + V_1.$$

Ponieważ przekształcenie liniowe L_1 zachowuje kombinacje liniowe wektorów wodzących (patrz Definicja 7.1.1), więc w szczególności mamy, że $L_1\big(L_2(X) + V_2\big) = L_1(L_2(X)) + L_1(V_2) = L_1 \circ L_2(X) + L_1(V_2)$, zatem ostatecznie możemy zapisać:

$$S_1 \circ S_2 = L_1 \circ L_2(X) + L_1(V_2) + V_1.$$

Widzimy, że otrzymane przekształcenie jest afiniczne.

8.2 Własności przekształceń afinicznych

Przedstawmy teraz kilka własności przekształceń afinicznych. Potrzebna nam będzie poniższa definicja.

Definicja 8.2.1. Jeśli $T(A) = A'$ i $T(B) = B'$, to mówimy, że wektor zaczepiony $\overrightarrow{A'B'}$ jest **obrazem wektora zaczepionego** $\overrightarrow{AB}$ przez przekształcenie T.

Fakt 8.2.2. *Dla dowolnego przekształcenia afinicznego T danego wzorem (8.1.1) zachodzą następujące własności:*

- *T przekształca równe wektory zaczepione na równe wektory zaczepione;*
- *T przekształca dowolny wektor zaczepiony równy wersorowi $[1, 0]$ na wektor o współrzędnych $[a, b]$ i odpowiednio równy wersorowi $[0, 1]$ na $[c, d]$;*
- *T przekształca punkt $(0, 0)$ na punkt (p, q).*

Dowód. Pokażemy tylko pierwszą własność, ponieważ pozostałe można łatwo wyprowadzić w podobny sposób.

Pokażemy, że jeśli wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe, to ich obrazy $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{C'D'}$ też są równe. Oznaczmy współrzędne punktu A przez (x_a, y_a) i analogicznie pozostałe punkty. Mamy więc z równości wektorów:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = [x_b - x_a,\ y_b - y_a] = [x_d - x_c,\ y_d - y_c].$$

Zachodzą zatem równości poszczególnych współrzędnych:

$$(\bigstar)\quad x_b - x_a = x_d - x_c \quad \text{oraz} \quad y_b - y_a = y_d - y_c.$$

Skorzystamy z nich w dalszej części dowodu. Teraz natomiast obliczmy współrzędne obrazu punktu A przez przekształcenie afiniczne T:

$$T(A) = A' = (x'_a, y'_a) = (ax_a + cy_a + p,\ bx_a + dy_a + q).$$

Obrazy punktów B, C, D mają analogiczną postać:

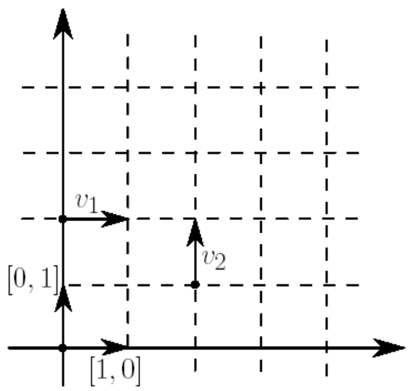
$$\begin{aligned} B' &= (ax_b + cy_b + p,\ bx_b + dy_b + q),\\ C' &= (ax_c + cy_c + p,\ bx_c + dy_c + q),\\ D' &= (ax_d + cy_d + p,\ bx_d + dy_d + q). \end{aligned}$$

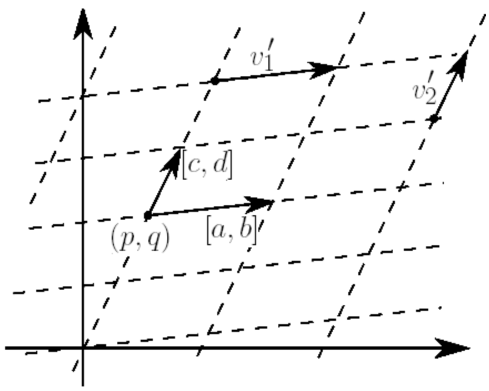
Zatem korzystając z $(\bigstar)$ mamy:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} &= [ax_b + cy_b + p - ax_a - cy_a - p,\ bx_b + dy_b + q - bx_a - dy_a - q] =\\ &= [a(x_b - x_a) + c(y_b - y_a),\ b(x_b - x_a) + d(y_b - y_a)] =\\ &= [a(x_d - x_c) + c(y_d - y_c),\ b(x_d - x_c) + d(y_d - y_c)] =\\ &= [ax_d + cy_d + p - ax_c - cy_c - p,\ bx_d + dy_d + q - bx_c - dy_c - q] = \overrightarrow{C'D'} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem, że obrazy równych wektorów zaczepionych są równe. □

Poniższe rysunki obrazują wyżej wymienione własności. Z lewej strony w układzie współrzędnych narysowane są wersory oraz wektory v_1, v_2 równe wersorom. Wersory wyznaczają kwadratową siatkę która jest zaznaczona przerywanymi liniami. Rysunek po prawej stronie to narysowane w układzie współrzędnych obrazy wersorów przez pewne przekształcenie afiniczne, a także obrazy wektorów v_1, v_2 oznaczone przez v'_1, v'_2. Wraz z wersorami wyznaczającymi kwadratową siatkę przekształcona została cała siatka. Jej obrazem jest siatka równoległoboków wyznaczona przez obrazy wersorów. Dzięki tej siatce łatwiej jest zaobserwować to, o czym była mowa w Fakcie 8.2.2, że równe wektory zaczepione przekształcenie afiniczne przeprowadza na równe wektory zaczepione. W tym przypadku mamy dwie pary równych wektorów zaczepionych: wersor $[1, 0]$ i v_1 oraz wersor $[0, 1]$ i v_2.





Kolejny fakt będzie nam potrzebny w dalszej części tego rozdziału, przy omawianiu własności przekształceń zwanych izometriami.

Fakt 8.2.3. *Przekształcenie afiniczne zachowuje kombinacje liniowe wektorów zaczepionych.*

Dowód. Niech $\overrightarrow{A'B'} = S(\overrightarrow{AB})$ będzie wektorem zaczepionym, który jest obrazem wektora zaczepionego $\overrightarrow{AB}$ przez przekształcenie afiniczne S. Niech L będzie częścią liniową S, a T translacyjną o wektorze przesunięcia V. Obraz X' dowolnego punktu X przez S wyraża się wzorem $X' = S(X) = L(X) + V$. Zbadajmy obraz wektora zaczepionego $\overrightarrow{AB}$:

$$S(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{L(A) + V\ L(B) + V}.$$

Współrzędne wektora wyliczamy odejmując współrzędne początku wektora od współrzędnych końca. Mamy zatem

$$\begin{aligned} S(\overrightarrow{AB}) &= (L(B) + V) - (L(A) + V) = L(B) + V - L(A) - V = \\ &= L(B) - L(A) = L(B - A). \end{aligned}$$

Wektor $B - A$ jest równy wektorowi zaczepionemu $\overrightarrow{AB}$, bo mają jednakowe współrzędne. Zatem z otrzymanej powyżej równości mamy, że wektory zaczepione są przekształcane przez S tak samo jak wektory wodzące przez L. Dowód kończymy stwierdzeniem, że L jako przekształcenie liniowe zachowuje kombinacje liniowe wektorów wodzących, więc S zachowuje kombinacje liniowe wektorów zaczepionych. $\square$

Kolejny fakt informuje nas o tym, które przekształcenia afiniczne są odwracalne, czyli które posiadają przekształcenie odwrotne.

Fakt 8.2.4. *Niech $S = T \circ L$ będzie dowolnym przekształceniem afinicznym o części liniowej L zadanej macierzą M oraz części translacyjnej T. Wówczas*

$$S \text{ jest odwracalne} \iff \det(M) \neq 0.$$

Jeśli ponadto istnieje przekształcenie odwrotne S^{-1}, to jest ono także afiniczne.

Dowód. Z Faktu 7.4.1 wynika, że $\det M \neq 0 \ \Leftrightarrow\ L$ jest odwracalne, czyli że istnieje L^{-1}. Umiemy także określić przekształcenie odwrotne do translacji T. Jest nim translacja T^{-1} o wektor przeciwny niż wektor przesunięcia dla T. Rozważmy przekształcenie $P = L^{-1} \circ T^{-1}$. Jest ono przekształceniem odwrotnym do S. Rzeczywiście, zgodnie z definicją przekształcenia odwrotnego zawartej w Uwadze 6.3.4 mamy, że

$$P \circ S = (L^{-1} \circ T^{-1}) \circ (T \circ L) = L^{-1} \circ (T^{-1} \circ T) \circ L = L^{-1} \circ I \circ L = L^{-1} \circ L = I,$$

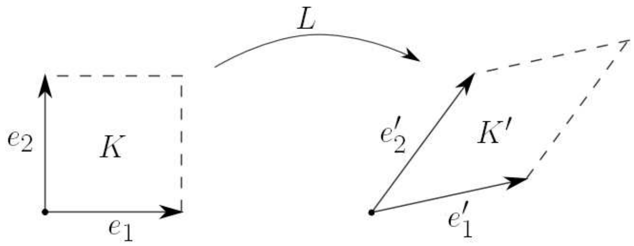
$$S \circ P = (T \circ L) \circ (L^{-1} \circ T^{-1}) = T \circ (L \circ L^{-1}) \circ T^{-1} = T \circ I \circ T^{-1} = T \circ T^{-1} = I.$$

Zatem $P = S^{-1}$. Ponadto to przekształcenie jest afiniczne, ponieważ jest złożeniem dwóch przekształcen afinicznych: przekształcenia liniowego L^{-1} (przekształcenie odwrotne do liniowego jest liniowe zgodnie z Wnioskiem 7.4.2 zatem jest też afiniczne) i translacji T^{-1}. Na podstawie Faktu 8.1.6 stwierdzamy, że P jest afiniczne. $\square$

8.3 Wyznacznik a pole figury przekształcanej

W tym podrozdziale zbadamy w jaki sposób zmienia się pole danej figury pod wpływem przekształcenia liniowego, a następnie zrobimy to samo dla przekształcenia afinicznego. Rozważmy więc przekształcenie liniowe L o macierzy $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

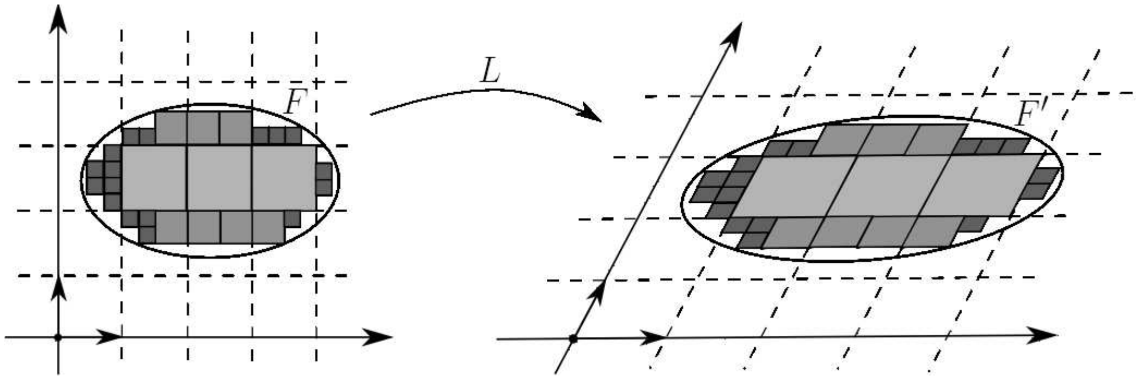
Zajmijmy się najpierw kwadratem jednostkowym K, który jest rozpięty na wersorach e_1 i e_2. Pole tego kwadratu jest równe 1. Przeprowadźmy K przez przekształcenie L. Powstanie wtedy równoległobok $K' = L(K)$. Pokazane jest to na rysunku poniżej.



Wiemy z rozdziału trzeciego (punkt 3.3.2), że pole rówoległoboku rozpiętego na wektorach jest równe wartości bezwzględnej z wyznacznika tej pary wektorów. Rozważany przez nas równoległobok jest rozpiety na obrazach e'_1, e'_2 wersorów. Zgodnie z Uwagą 7.2.2 mają one współrzędne odpowiadające kolumnom macierzy przekształcenia L, czyli $e'_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Otrzymujemy więc, że pole $P(K')$ równoległoboku K' jest równe:

$$P(K') = |\det(e'_1, e'_2)| = \left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| = k.$$

Zobaczmy teraz, jak jest w przypadku dowolnej figury. Przeprowadzimy jednak tylko szkicowe rozumowanie dla figury F narysowanej poniżej. Zauważmy najpierw, że wszystkie kwadraty K siatki przechodzą przez przekształcenie L na jednakowe równoległoboki K' przekształconej siatki. Jeśli teraz kwadrat jednostkowy podzielimy na cztery jednakowe mniejsze kwadraty, to po przeprowadzeniu ich przez L otrzymamy cztery jednakowe równoległoboki o polu równym $\frac{1}{4}$ pola K'. Operację dzielenia na mniejsze kwadraty możemy powtarzać dalej z analogicznym skutkiem. Pola figury F nie obliczymy od razu, ale będziemy je przybliżać coraz dokładniejszymi wartościami. Pola kwadratu K i równoległoboku K', które wyliczyliśmy wcześniej, będą jednostkami, którymi w pierwszym kroku będziemy wypełniać obszar figury F i odpowiednio $F' = L(F)$. W następnych krokach, dających lepsze przybliżenia, pozostałe obszary figur będziemy wypełniać coraz mniejszymi jednostkami równymi $\frac{1}{4}$ pola poprzednich jednostek. Rysunek poniżej przedstawia tę operację.



Po każdym kroku zliczamy ile jednostek danej wielkości mieści się w tych figurach. W ten sposób dostaniemy kolejne przybliżenia pól figur F i F', oznaczone przez $P_1, P_2, \ldots$ itd. oraz $P_1', P_2' \ldots$ itd. Mamy zatem dla przykładu z rysunku:

pole figury F	pole figury F'
$P_1 = 3 \cdot P(K) = 3 \cdot 1 = 3$	$P_1' = 3 \cdot P(K') = 3 \cdot k = k \cdot P_1$
$P_2 = P_1 + 7 \cdot \frac{1}{4} = 3 + \frac{7}{4} = 4\frac{3}{4}$	$P_2' = P_1' + 7 \cdot \frac{k}{4} = 3k + \frac{7}{4}k = 4\frac{3}{4} \cdot k = k \cdot P_2$
$P_3 = P_2 + 17 \cdot \frac{1}{16} = 5\frac{13}{16}$	$P_3' = P_2' + 17 \cdot \frac{k}{16} = 5\frac{13}{16} \cdot k = k \cdot P_3$
$\vdots$	$\vdots$
$P_n = P_{n-1} + t_n \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$	$P_n' = P_{n-1}' + t_n \cdot \frac{k}{4^{n-1}} = k \cdot P_n$

Zauważmy, że na każdym kroku n otrzymujemy zależność $P_n' = k \cdot P_n$ dla kolejnych przybliżeń pól. Przechodząc teraz z n do nieskończoności otrzymujemy w granicy pola figur:

$$P(F) = \lim_{n\to\infty} P_n, \qquad P(F') = \lim_{n\to\infty} P_n' = \lim_{n\to\infty} k \cdot P_n = k \cdot \lim_{n\to\infty} P_n = k \cdot P(F).$$

Możemy zatem wyciągnąć ostateczny wniosek dotyczący pola obrazu figury przez dowolne przekształcenie liniowe.

Wniosek 8.3.1. Dla dowolnego przekształcenia liniowego L o macierzy $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ i dla dowolnej figury F mamy, że

$$P(L(F)) = P(F') = \left|\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right| \cdot P(F).$$

W przypadku przekształcenia afinicznego S, o części liniowej L i translacyjnej T, pole figury będzie się zmieniać w takiej samej zależności jak podaje wniosek wyżej. Translacja bowiem nie zmienia pola figur a tylko przemieszcza je w inne miejsce. Zatem za zmianę pola figury przy przekształceniu afinicznym odpowiada jego część liniowa. Zapiszmy więc ostateczny wniosek.

Wniosek 8.3.2. Dla dowolnego przekształcenia afinicznego S, którego część liniowa L zadana jest macierzą $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ oraz dla dowolnej figury F mamy zależność:

$$P(S(F)) = P(L(F)) = \left|\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right| \cdot P(F).$$

Liczbę $\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ nazywamy **wyznacznikiem części liniowej przekształcenia afinicznego** S, dla takiego S, którego część liniowa dana jest macierzą $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Zobaczmy jak dla konkretnego przekształcenia afinicznego zmienia się pole figury przekształcanej.

Przykład 8.3.3. Przekształcenie T dane jest wzorem $\begin{cases} x' = -x + \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = 2x + 3y - 1 \end{cases}$.

Jest ono afiniczne a macierz części liniowej to $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Możemy zatem obliczyć, jak zmienia się pole figur pod wpływem tego przekształcenia:

$$P(T(F)) = \left|\det\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right| \cdot P(F) = |-4| \cdot P(F) = 4 \cdot P(F).$$

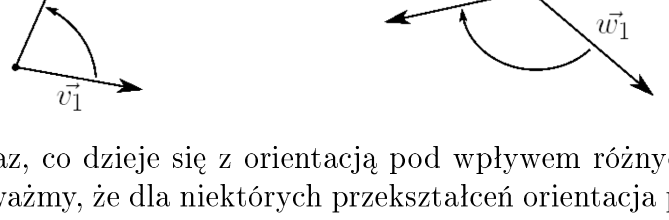
Pole dowolnej figury pod wpływem tego przekształcena zwiększa się 4-krotnie.

8.4 Orientacja płaszczyzny

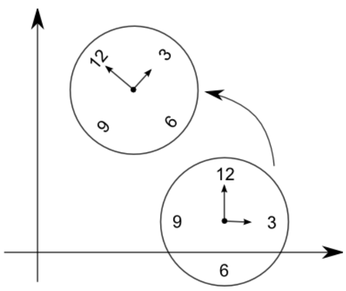
Orientacja płaszczyzny to wyróżniony kierunek obrotu na płaszczyźnie. Tradycyjnie jest to kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara, mówimy wtedy, że jest to orientacja dodatnia. W rozdziale trzecim wspominaliśmy o kątach zorientowanych i określaliśmy ich znak jako dodatni, bądź ujemny (podrodział 3.3.4). Jako że kąt zorientowany tworzy uporządkowana para wektorów liniowo niezależnych, to orientację płaszczyzny wyznacza właśnie taka para wektorów.

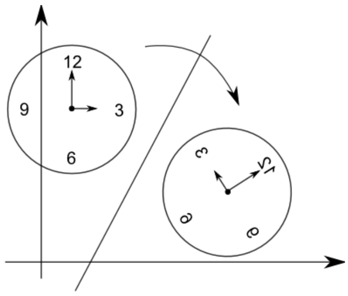
Definicja 8.4.1. Uporządkowana para liniowo niezależnych wektorów $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ jest **dodatnio zorientowana**, jeśli mniejszy od 180° zorientowany kąt od $\vec{v_1}$ do $\vec{v_2}$ jest dodatni, zaś para $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ jest **ujemnie zorientowana**, gdy kąt ten jest ujemny.

Na rysunku poniżej para wektorów $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ jest dodatnio zorientowana i wyznacza orientację dodatnią płaszczyzny, a para $(\vec{w_1}, \vec{w_2})$ jest ujemnie zorientowana i wyznacza ujemną orientację.



Zobaczmy teraz, co dzieje się z orientacją pod wpływem różnych przekształceń płaszczyzny. Zauważmy, że dla niektórych przekształceń orientacja przed i po przekształceniu płaszczyzny zotaje ta sama, a dla innych zmienia się. Mówimy wtedy, że dane przekształcenie zachowuje, bądź zmienia orientację. Poniżej rysunek po lewej stronie przedstawia obrót tarczy zegarowej o pewien kąt i widać, że orientacja nie zmieniła się. Z prawej strony natomiast jest przykład przekształenia zmieniającego orientację, a mianowicie symetria osiowa.

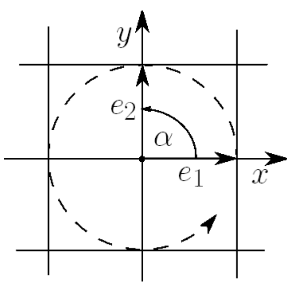


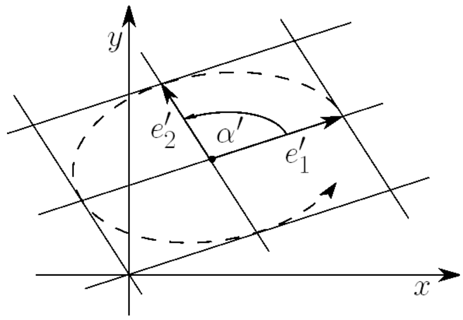


Zwróćmy uwagę, że para wersorów (e_1, e_2) jest dodatnio zorientowana, zatem dla przekształcenia afinicznego zachowywanie lub zmienianie orientacji można określić za pomocą obrazów wersorów przez to przekształcenie.

Definicja 8.4.2. Przekształcenie afniczne **zachowuje orientację**, jeśli uporządkowana para $(\vec{e_1}', \vec{e_2}')$ obrazów wersorów przez to przekształcenie jest dodatnio zorientowana. Przekształcenie afiniczne **zmienia orientację**, jeśli para $(\vec{e_1}', \vec{e_2}')$ jest ujemnie zorientowana.

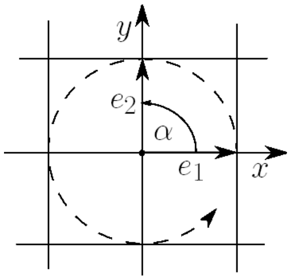
Zobaczmy ilustracje tej definicji. Na rysunkach poniżej w układach współrzędnych zaznaczone są wersory a obok obrazy wersorów przez pewne przekształcenie afiniczne zachowujące orientację. Przerywaną linią zaznaczony jest kierunek orientacji płaszczyzny. Obok rysunków wypisane są także warunki równoważne temu, że dane przekształcenie zachowuje orientację. Warunki te wynikają z Definicji 8.4.2 oraz 8.4.1, a także ze wspomnianego już podrozdziału 3.3.4.

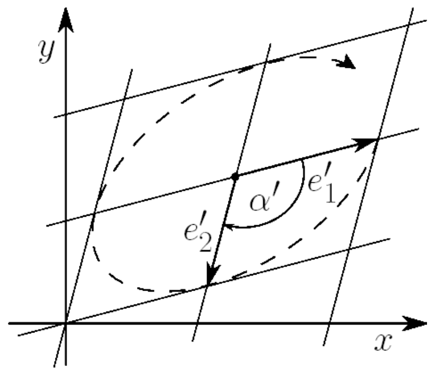




$\alpha' > 0$
$\sin\alpha' > 0$
$\det(e'_1, e'_2) > 0$

Podobnie mamy dla przekształcenia afinicznego zmieniającego orientację płaszczyzny.





$\alpha' < 0$
$\sin\alpha' < 0$
$\det(e'_1, e'_2) < 0$

Przypomnijmy, że gdy część liniowa przekształcenia afinicznego S zadana jest macierzą $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, to obrazy e_1', e_2' wersorów (jako wektorów zaczepionych) mają współrzędne $e_1' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Dzięki temu możemy sformułować następujący fakt.

Fakt 8.4.3. *Przekształcenie afiniczne S, którego część liniowa zadana jest macierzą $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\det(e_1', e_2') > 0 \;\Leftrightarrow\; \det([a,b],[c,d]) > 0 \;\Leftrightarrow\; \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} > 0.$$

Przekształcenie S zmienia orientację, gdy znaki powyższych nierówności są przeciwne.

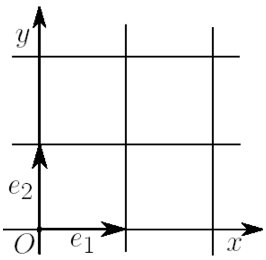
Przykład 8.4.4. Zbadajmy, czy jednokładność o skali $k \neq 0$ i środku w punkcie (x_0, y_0) zmienia, czy zachowuje orientację płaszczyzny.
Przekształcenie to dane jest wzorem $\begin{cases} x' = k(x - x_0) + x_0 \\ y' = k(y - y_0) + y_0 \end{cases}$ (porównaj punkt 6.1.3), stąd macierz jego części liniowej to $M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Zatem $\det M = k^2 > 0$, a więc przekształcenie to zachowuje orientację płaszczyzny.

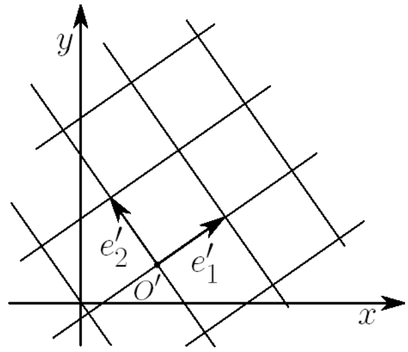
8.5 Izometrie

W dalszych dwóch podrozdziałach omówimy dwie specjane rodziny przekształceń afinicznych ważne w geometrii: izometrie i podobieństwa.

Definicja 8.5.1. **Izometria** to takie przekształcenie afniczne płaszczyzny, które parę wersorów e_1, e_2 przeprowadza na parę wektorów e_1', e_2', które są jednostkowe (czyli długości 1) i prostopadłe do siebie.

Rysunki poniżej przedstawiają przekształenie, dla którego $|e_1'| = |e_2'| = 1$ i $e_1 \perp e_2$. Te dwa warunki to inaczej zapisane warunki z Definicji 8.5.1, zatem jest to izometria.





Przykładami izometrii są:
– translacje o dowolne wektory,
– obroty o dowolne kąty,
– symetrie względem dowolnych prostych.

Fakt 8.5.2. *Dla każdej izometrii T prawdziwa jest następująca własność. Dla dowolnych punktów A, B mamy, że*

$$|A'B'| = |AB|,$$

gdzie $A' = T(A)$ i $B' = T(B)$. Mówimy wtedy, że izometria zachowuje odległości pomiędzy punktami.

Dowód. W dowodzie tej własności zamiast długości odcinków będziemy badać długości odpowiednich wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$. Pierwszy wektor rozkładamy względem wersorów:

$$\overrightarrow{AB} = t \cdot e_1 + s \cdot e_2,$$

a drugi względem obrazów wersorów przez T:

$$\overrightarrow{A'B'} = t \cdot e_1' + s \cdot e_2'.$$

Wiemy, że współczynniki tych rozkładów są jednakowe, bo izometria jako przekształcenie afiniczne zachowuje kombinacje liniowe wektorów zaczepionych (Fakt 8.2.3).

Następnie porównujemy długości tych wektorów wykorzystując własności iloczynu skalarnego:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} = \sqrt{(te_1 + se_2) \circ (te_1 + se_2)} = \\ &= \sqrt{t^2 \cdot e_1 \circ e_1 + 2 \cdot t \cdot s \cdot e_1 \circ e_2 + s^2 \cdot e_2 \circ e_2} = \sqrt{t^2 + s^2}, \end{aligned}$$

bo $e_1 \circ e_1 = |e_1|^2 = 1$ i podobnie $e_2 \circ e_2 = 1$, a także e_1 i e_2 są prostopadłe, więc $e_1 \circ e_2 = 0$. Analogicznie dla drugiego wektora:

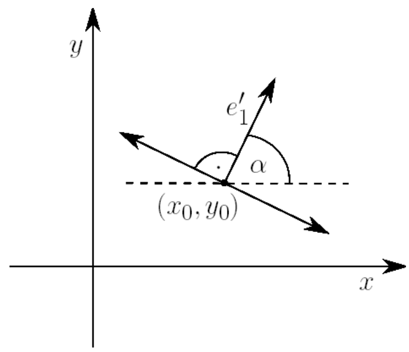
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A'B'}| &= \sqrt{\overrightarrow{A'B'} \circ \overrightarrow{A'B'}} = \sqrt{(te_1' + se_2') \circ (te_1' + se_2')} = \\ &= \sqrt{t^2 \cdot e_1' \circ e_1' + 2 \cdot t \cdot s \cdot e_1' \circ e_2' + s^2 \cdot e_2' \circ e_2'} = \sqrt{t^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ są równe, a więc mamy też, że $|AB| = |A'B'|$. $\square$

Uwaga 8.5.3. Własność z Faktu 8.5.2 jest też traktowana jako definicja izometrii. W powyższym dowodzie pokazaliśmy, że z Definicji 8.5.1 wynika ta własność. Implikacja w drugą stronę też jest prawdziwa, jednak jej dowód pomijamy.

8.5.4. Wzory ogólne izometrii

Jeśli chcemy wyznaczyć ogólne wzory izometrii, to możemy posłużyć się obrazami wersorów przez izometrię T. Będą one zaczepione w punkcie $O' = (x_0, y_0)$ będącym obrazem początku układu współrzędnych.



Wiemy, że $|e'_1| = |e'_2| = 1$ oraz $e_1 \perp e_2$, zatem jeśli ustalimy wektor e'_1, to wektor e'_2 możemy wyznaczyć na dwa sposoby. Przedstawia to rysunek obok. Współrzędne tych wektorów są następujące:

$$e'_1 = [\cos\alpha, \sin\alpha],$$

$$e'_2 = [\sin\alpha, -\cos\alpha] \quad \text{lub} \quad e'_2 = [-\sin\alpha, \cos\alpha].$$

Wzory izometrii dla obu przypadków to:

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y + x_0 \\ y' = \sin\alpha \cdot x - \cos\alpha \cdot y + y_0 \end{cases},$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y + x_0 \\ y' = \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y + y_0 \end{cases}.$$

Macierze części liniowych tych przekształceń to odpowiednio:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Obliczmy wartości wyznaczników powyższych macierzy, a następnie na ich podstawie wyciągniemy wnioski.

$$\det(M_1) = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1,$$
$$\det(M_2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Wniosek 8.5.5.

1. Izometrie zachowują pola figur, ponieważ $|\det(M_1)| = |\det(M_2)| = 1$, co zgodnie z Wnioskiem 8.3.1 oznacza, że pole nie zmienia się.

2. Izometrie są przekształceniami odwracalnymi, bo wyznaczniki są różne od zera.

3. Izometrie zmieniające orientację płaszczyzny są dane wzorem (1), bo wtedy $\det(M_1) < 0$, zaś zachowujące orientację dane są wzorem (2) ($\det(M_2) > 0$).

8.6 Podobieństwa

Definicja 8.6.1. **Podobieństwo** to takie przekształcenie afiniczne, które wersory e_1, e_2 przeprowadza na wektory e_1', e_2' równych długości i prostopadłe do siebie. Liczbę $\kappa = |e_1| = |e_2|$ nazywamy **skalą podobieństwa**.

Przykładami takich przekształceń są:

- izometrie, są to podobieństwa o skali $\kappa = 1$,
- jednokładności o skali k, są one podobieństwami o skali $\kappa = |k|$.

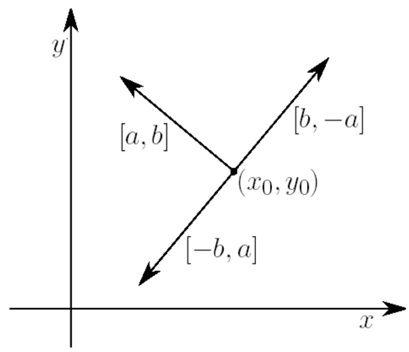
Fakt 8.6.2. *Dla dowolnych punktów A i B podobieństwo o skali κ zmienia odległości między nimi w stosunku κ, tzn:*

$$|A'B'| = \kappa \cdot |AB|.$$

Dowód tego faktu jest podobny do dowodu Faktu 8.5.2, więc go pomijamy.

8.6.3. Wzory ogólne podobieństw

Niech obraz wersora e_1 przez podobieństwo będzie miał współrzędne $e_1' = [a, b]$. Z definicji wiemy, że obraz drugiego wersora ma być prostopadły i tej samej długości. Zatem (z Uwagi 3.2.5) mamy, że e_2' może mieć współrzędne: $[-b, a]$ lub $[b, -a]$. Na rysunku obok zaznaczone są te wektory. Jeśli obrazem punktu $(0, 0)$ jest punkt $O' = (x_0, y_0)$, to wzory podobieństw i macierze części liniowych mają postać:



$$(1) \qquad \begin{cases} x' = ax - by + x_0 \\ y' = bx + ay + y_0 \end{cases}, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = bx - ay + y_0 \end{cases}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

Podobnie jak przy omawianiu izometrii, znając wyznaczniki macierzy:

$$\det(M_1) = a^2 + b^2, \qquad \det(M_2) = -a^2 - b^2.$$

wyciągniemy wnioski dotyczące podobieństw.

Wniosek 8.6.4.

1. Podobieństwo o skali κ zmienia pola figur w proporcji κ^2. Mamy bowiem

   $$|\det(M_1)| = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = |[a, b]|^2 = |e_1|^2 = \kappa^2.$$

   Podobnie także $\det(M_2) = \kappa^2$.

2. Podobieństwa postaci (1) zachowują orientację płaszczyzny (bo $\det(M_1) > 0$), a postaci (2) ją zmieniają ($\det(M_2) < 0$).

Rozdział 9

Klasyfikacja krzywych drugiego stopnia

9.1 Definicja krzywej drugiego stopnia

W tym rozdziale opiszemy krzywe zadane równaniami $F(x, y) = 0$, gdzie $F(x, y)$ jest wielomianem. Ograniczymy się jednak tylko do wielomianów stopnia 1 i 2. Takie wielomiany określają odpowiednio tzw. krzywe pierwszego oraz drugiego stopnia. Ogólnie mówimy, że **stopień krzywej** to stopień określającego ją wielomanu.

Definicja 9.1.1. **Krzywa pierwszego stopnia** to krzywa zadana równaniem postaci $ax + by + c = 0$, gdzie przynajmniej jeden ze współczynników a, b jest niezerowy.

Krzywe pierwszego stopnia to proste.

Uwaga 9.1.2. Jeśli w równaniu $ax + by + c = 0$ mielibyśmy, że $a = b = 0$, to otrzymane równanie byłoby stopnia zerowego.

Definicja 9.1.3. **Krzywą drugiego stopnia** nazywamy krzywą daną równaniem $F(x, y) = 0$, gdzie $F(x, y)$ jest pewnym wielomianem drugiego stopnia:

$$F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0. \tag{9.1.1}$$

Ponadto przynajmniej jeden ze współczynników a, b, c przy składnikach drugiego stopnia tego wielomianu musi być niezerowy (bo inaczej otrzymaliśmy równanie niższego stopnia).

9.2 Krzywe stopnia 2 opisane równaniami, w których nie występuje wyraz mieszany

Rozważymy teraz różne przypadki równań postaci (9.1.1) w zależności od występujących w nich współczynników. Będziemy określać jakie krzywe opisują te równania.

W tym podrozdziale zajmiemy się tylko tymi równaniami, dla których współczynnik c występujący przy wyrazie mieszanym $x \cdot y$ jest zerowy. W takim przypadku równanie (9.1.1) przybiera prostszą postać

$$(\bigstar) \qquad F(x,y) = ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0.$$

Przypomnijmy, że przynajmniej jeden ze współczynników a, b musi byc niezerowy, żeby równanie było stopnia 2. Mamy zatem następujące przypadki.

1. **Przypadek $\mathbf{a \neq 0,\ b \neq 0}$.**
   W tej sytuacji równanie ($\bigstar$) ma postać:

   $$F(x,y) = ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0.$$

   Przekształcając to równanie otrzymujemy:

   $$a\left(x^2 + \tfrac{dx}{a} + \tfrac{d^2}{4a^2}\right) - \tfrac{d^2}{4a} + b\left(y^2 + \tfrac{ey}{b} + \tfrac{e^2}{4b^2}\right) - \tfrac{e^2}{4b} + f = 0$$
   $$a\left(x + \tfrac{d}{2a}\right)^2 + b\left(y + \tfrac{e}{2b}\right)^2 - \left(\tfrac{d^2}{4a} + \tfrac{e^2}{4b} - f\right) = 0.$$

   Jeśli oznaczymy $H = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4b} - f$, to równanie ma postać:

   $$(1) \qquad a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{e}{2b}\right)^2 = H.$$

   Zauważmy, że H jest pewną stałą, bo nie zależy od zmiennych x i y. Mamy zatem trzy podprzypadki:

   (a) Jeśli $H = 0$ i znaki współczynników a i b są jednakowe, to z równania (1) otrzymujemy punkt.
   Np. równanie $5(x+2)^2 + 4(y-3)^2 = 0$ opisuje punkt, bo jedynie para liczb $x = -2,\ y = 3$ je spełnia.

   (b) Jeśli $H = 0$ i znaki współczynników a i b są różne, to równanie (1) przedstawia dwie proste, np.

   $$4x^2 - 9y^2 - 6x + 15y - 4 = 0$$
   $$\left(2x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(3y - \tfrac{5}{2}\right)^2 - 4 - \tfrac{9}{4} + \tfrac{25}{4} = 0$$
   $$\left(2x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(3y - \tfrac{5}{2}\right)^2 = 0$$
   $$\left(2x - \tfrac{3}{2} - 3y + \tfrac{5}{2}\right)\left(2x - \tfrac{3}{2} + 3y - \tfrac{5}{2}\right) = 0$$
   $$(2x - 3y + 1)(2x + 3y - 4) = 0.$$

   Równanie to przedstawia sumę prostych $2x - 3y + 1 = 0$ i $2x + 3y - 4 = 0$, bo zapisany wyżej iloczyn wyrażeń $2x - 3y + 1$ i $2x + 3y - 4$ jest równy zero, gdy przynajmniej jeden z tych czynników jest zerem. Zatem otrzymujemy dwa równania stopnia 1, które jak wiemy są prostymi.

   (c) Jeśli $H \neq 0$, to równanie (1) możemy przekształcić do postaci

   $$(2) \qquad \frac{\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2}{\frac{H}{a}} + \frac{\left(y + \frac{e}{2b}\right)^2}{\frac{H}{b}} = 1.$$

   Wyróżniamy wtedy trzy możliwości:

– dla $\frac{H}{a} > 0,\ \frac{H}{b} > 0$ mamy równanie elipsy,
– dla $\frac{H}{a}$ i $\frac{H}{b}$ różnych znaków mamy równanie hiperboli,
– dla $\frac{H}{a} < 0,\ \frac{H}{b} < 0$ mamy zbiór pusty.

Np. Krzywa dana równaniem $\frac{(x-2)^2}{-3} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$ jest hiperbolą.

2. Przypadek $\mathbf{a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0}$.
Równanie (★) ma teraz następującą postać:

$$F(x,y) = ax^2 + dx + ey + f = 0.$$

Przekształcamy je:

$$a\left(x^2 + \tfrac{dx}{a} + \tfrac{d^2}{4a^2}\right) + ey - \tfrac{d^2}{4a} + f = 0$$
$$a\left(x + \tfrac{d}{2a}\right)^2 + ey - \left(\tfrac{d^2}{4a} - f\right) = 0.$$

Podstawiając teraz za wyrażenie $\frac{d^2}{4a} - f$ literę G zapisujemy równanie

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + ey = G, \tag{3}$$

dla którego rozważymy następujące podprzypadki.

(a) Jeśli $e = 0$, to równanie (3) ma postać $\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 = \frac{G}{a}$ i mamy:
– dla $\frac{G}{a} = 0$ równanie (3) przedstawia prostą pionową $x + \frac{d}{2a} = 0$ (jest to tzw. prosta podwójna);
– dla $\frac{G}{a} > 0$ mamy:

$$\left(x + \tfrac{d}{2a}\right)^2 - \tfrac{G}{a} = 0$$
$$\left(x + \tfrac{d}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\tfrac{G}{a}}\right)^2 = 0$$
$$\left(x + \tfrac{d}{2a} - \sqrt{\tfrac{G}{a}}\right)\left(x + \tfrac{d}{2a} + \sqrt{\tfrac{G}{a}}\right) = 0$$
$$x + \tfrac{d}{2a} - \sqrt{\tfrac{G}{a}} = 0 \quad \text{lub} \quad x + \tfrac{d}{2a} + \sqrt{\tfrac{G}{a}} = 0,$$

co oznacza parę pionowych prostych równoległych;
– dla $\frac{G}{a} < 0$ otrzymujemy zbiór pusty.

(b) Jeśli $e \neq 0$, to równanie (3) jest wtedy następujące:

$$y = -\frac{a}{e}\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{G}{e}.$$

Jest to równanie pewnej paraboli.

3. Przypadek $\mathbf{a = 0,\ b \neq 0,\ c = 0}$.
Jest to przypadek analogiczny do drugiego, z tym że role x i y są zamienione, zatem zamiast prostych pionowych, mamy proste poziome, a parobola jest inaczej położona.

9.3 Krzywe stopnia 2 o równaniach, w których występuje wyraz mieszany

Po omówieniu w poprzednim podrozdziale wszystkich przypadków równań drugiego stopnia, w których nie występował wyraz mieszany, zajmiemy się teraz pozostałymi równaniami postaci (9.1.1), w których współczynnik c przy xy jest niezerowy. W tym przypadku nie jest tak łatwo jak przedtem sprowadzić takie równanie do postaci kanonicznej. Sposobem na rozpoznanie krzywej zadanej równaniem (9.1.1) będzie obrócenie jej najpierw o pewien kąt. Jak się okaże, po obróceniu krzywa przyjmie jedną z postaci opisaną w poprzednim podrozdziale. Obróćmy zatem krzywą o równaniu

$$F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

o pewien kąt α. Wzór obrotu to

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases}.$$

Aby znaleźć równanie obrazu krzywej przez to przekształcenie musimy najpierw wyznaczyć wzór przekształcenia odwrotnego. Wiemy, że w tym przypadku przekształceniem odwrotnym jest obrót o kąt $-\alpha$, zatem wzór jest następujący:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos(-\alpha) - y' \cdot \sin(-\alpha) \\ y = x' \cdot \sin(-\alpha) + y' \cdot \cos(-\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha \\ y = -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}.$$

Równanie obróconej krzywej to:

$$\begin{aligned} &a(x' \cos\alpha + y' \sin\alpha)^2 + b(-x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 + \\ &+c(x' \cos\alpha + y' \sin\alpha)(-x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + \\ &+d(x' \cos\alpha + y' \sin\alpha) + e(-x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + f = 0. \end{aligned}$$

Możemy przekształcić to równanie wykonując działania i porządkując wyrazy podobne, jednak nie będziemy przedstawiać tu całości tych rachunków. Czytelnik może je bez trudu wykonać samodzielnie. Interesuje nas tylko współczynnik przy $x'y'$, który chcemy by był równy zero. Wyliczymy go śledząc współczynniki przy $x'y'$ pochodzące od poszczególnych kwadratów bądź iloczynów. Nietrudno przekonamy się, że wynosi on

$$a \cdot 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha + b \cdot 2(-\sin\alpha) \cdot \cos\alpha + c \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Ponieważ wartość kąta α możemy dobrać w sposób dla nas najdogodniejszy, możemy zadbać, by był on taki, że powyższy współcznnik przy $x'y'$ wynosi 0. Daje to równanie:

$$2\cos\alpha \cdot \sin\alpha(a - b) + c \cdot \cos 2\alpha = 0$$
$$(a - b)\sin 2\alpha + c \cdot \cos 2\alpha = 0$$
$$(a - b)\sin 2\alpha = -c \cdot \cos 2\alpha$$

$$(\blacktriangle) \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a - b}{c}.$$

Funkcja cotangens przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, dlatego dla każdej krzywej $F(x,y)=0$ znajdziemy odpowiednie α. Po obrocie o ten kąt równanie danej krzywej przyjmuje postać jednego z przypadków omówionych w podrozdziale 9.2. Od konkretnych równań zależy który będzie to przypadek. Nie będziemy tego rozważać ogólnie, lecz poniższe ćwiczenie zilustruje na konkretnym przykładzie rozpoznawanie krzywej stopnia 2 na podstawie równania.

Ćwiczenie 9.3.1. Jaka krzywa jest zadana równaniem $2x^2+2y^2+5xy+1=0$?
ROZWIĄZANIE:
Zauważmy, że w równaniu tej krzywej występuje niezerowy współczynnik przy wyrazie mieszanym xy, zatem zgodnie z ostatnim punktem powyżej przedstawionej klasyfikacji najpierw obrócimy krzywą o kąt α spełniający warunek (▲). Wyliczmy ten kąt:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{2-2}{5} = 0, \quad \text{stąd} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Chcemy teraz wyznaczyć równanie obrazu krzywej po obrocie o kąt $\frac{\pi}{4}$. Przekształceniem odwrotnym do tego obrotu jest obrót o kąt $-\frac{\pi}{4}$ o wzorze:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos(-\frac{\pi}{4}) - y\cdot\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ y' = x\cdot\sin(-\frac{\pi}{4}) + y\cdot\cos(-\frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{cases}.$$

Obliczmy równanie obróconej krzywej:

$$\begin{gathered} 2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right)^2 + 2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\right)^2 + 5\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}(y-x)+1=0 \\ x^2+2xy+y^2+y^2-2xy+x^2+\tfrac{5}{2}(y^2-x^2)+1=0 \\ -\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{9}{2}y^2+1=0 \\ \tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{9}{2}y^2=1. \end{gathered}$$

Na podstawie otrzymanego równania rozponajemy jaką krzywą ono przedstawia. Ponieważ współczynniki przy x^2 i y^2 są różne, zatem dana krzywa jest hiperbolą.

Poza krzywymi wymienionymi w podrozdziale 9.2 nie ma innych krzywych drugiego stopnia. Mówi o tym poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie 9.3.2. *Jedyne krzywe stopnia 2 to: elipsa, hiperbola, parabola, dwie proste, prosta, punkt i zbiór pusty.*

Rozdział 10

Macierze

10.1 Przekształcenia liniowe w języku algebraicznym

Przekształcenia liniowe poznaliśmy w rozdziale siódmym, teraz natomiast opiszemy je w języku algebry liniowej.

Przypomnijmy najpierw, że wektorem wodzącym punktu $X(x, y)$ nazywamy wektor $\overrightarrow{OX} = [x, y]$. Oznaczać go będziemy inaczej niż do tej pory, zamiast $[x, y]$ będziemy pisać $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Zbiór wszystkich wektorów wodzących na płaszczyźnie będziemy oznaczać przez $\mathbb{R}^2$. Wektor wodzący danego punktu będziemy utożsamiać z tym punktem, którego jest on wektorem wodzącym, dlatego też zwykle wektory wodzące będziemy oznaczać pojedynczymi literami, np. X, Y, Z.

Przekształcenie liniowe będziemy oznaczać jako $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ponieważ przeprowadza ono wektory wodzące z $\mathbb{R}^2$ na wektory wodzące z $\mathbb{R}^2$ (bo punkt O będący początkiem wektorów wodzących przekształcany jest sam na siebie). Skoro punkty utożsamiamy z ich wektorami wodzącymi, to zamiast przekształcać punkt przez T i pisać $T(x, y) = (x', y')$, będziemy działać przekształceniem T na wektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i pisać wtedy, że $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Dla przekształceń liniowych zachodzi własność zachowywania kombinacji liniowej wektorów wodzących:

$$\text{jeśli} \quad \overrightarrow{OX} = t \cdot \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{OB}, \quad \text{to} \quad \overrightarrow{OX'} = t \cdot \overrightarrow{OA'} + s \cdot \overrightarrow{OB'}, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Teraz zapiszemy ją jako:

$$T\left(t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = t \cdot T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \cdot T\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Możemy zatem już opisać przekształcenie liniowe w następujący sposób.

Definicja 10.1.1. Przekształcenie $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest **liniowe**, jeśli dla dowolnych wektorów $X, Y \in \mathbb{R}^2$ oraz dowolnych liczb $t, s \in \mathbb{R}$ mamy:

$$T(tX + sY) = t \cdot T(X) + s \cdot T(Y).$$

Możemy stosować także poniższy fakt do rozpoznawania przekształceń liniowych.

Fakt 10.1.2. *Przekształcenie $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące dwa warunki:*

(a) $\forall X \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R} \quad T(t \cdot X) = t \cdot T(X)$ *(jednorodność);*

(b) $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2 \quad T(X+Y) = T(X) + T(Y)$ *(addytywność).*

Dowód. Pokażemy dwie implikacje.

($\Rightarrow$) Zauważmy, że równości (a) i (b), które chcemy pokazać, są po prostu szczególnymi przypadkami założenia liniowości z Definicji 10.1.1

- dla $Y = 0$ mamy $T(tX) = t \cdot T(X)$;
- dla $t = s = 1$ mamy $T(X+Y) = T(X) + T(Y)$.

($\Leftarrow$) Zakładamy teraz jednorodność i addytywność i pokażemy równość z Definicji 10.1.1. Rozważmy wektory $X_t = t \cdot X$ oraz $Y_s = s \cdot Y$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} T(tX+sY) &= T(X_t + Y_s) = T(X_t) + T(Y_s) = T(t \cdot X) + T(s \cdot Y) = \\ &= t \cdot T(X) + s \cdot T(Y). \end{aligned}$$

$\square$

10.1.3. Wzór przekształcenia liniowego

Wyznaczymy teraz ogólny wzór przekształcenia liniowego, podobnie jak robiliśmy to w rozdziale siódmym. Będziemy stosować własności przekształceń liniowych podane w Uwadze 10.1.2: (a) jednorodność i (b) addytywność . Okazuje się, że dla wyznaczenia wzoru przekształcenia liniowego T wystarczy znać obrazy wersorów przez to przekształcenie. Jeśli więc $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ oraz $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$, to mamy:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= T\left(\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\right) \overset{\textbf{(b)}}{=} T\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = \\ &= T\left(x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + T\left(y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \overset{\textbf{(a)}}{=} x \cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \\ &= x \cdot \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wzór przekształcenia liniowego jest więc następujący:

$$\Diamond \qquad T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}. \qquad \Diamond \tag{10.1.1}$$

Definicja 10.1.4. Macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazywamy **macierzą przekształcenia liniowego** T danego wzorem (10.1.1). Oznaczamy ją symbolem $m(T)$.

Dowlona macierz $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ wyznacza dokładnie jedno przekształcenie liniowe. Przekształcenie to jest dane wzorem $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} px+qy \\ rx+sy \end{pmatrix}$. Dzięki takiemu jednoznacznemu przyporządkowaniu utożsamiamy ze sobą przekształcenia liniowe $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i macierze $2{\times}2$.

10.1.5. Działanie macierzy na wektor

Jeśli A jest przekształceniem liniowym o macierzy $m(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, to wynikiem **działania macierzy** $m(A)$ **na wektor** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nazywamy wektor $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$. Taką operację zapisujemy następująco:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

Przykład 10.1.6. Wykonajmy podane działanie macierzy na wektorze:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 4\cdot(-3) \\ -2\cdot 2 + 1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że obraz dowolnego wektora X przez przekształcenie liniowe A i wynik działania macierzy $m(A)$ tego przekształcenia na wektorze X są jednakowe. Tę własność możemy zapisać w poniższy sposób:

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \qquad A(X) = m(A)\cdot X.$$

10.2 Mnożenie macierzy

Operację mnożenia macierzy definiujemy następująco:

$$\Diamond \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}. \qquad \Diamond \qquad (10.2.1)$$

Wynik mnożenia macierzy jest również macierzą.

Przykład 10.2.1. Obliczmy iloczyn macierzy $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & -2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mnożenie macierzy jest związane ze składaniem przekształceń liniowych. Informuje nas o tym poniższy fakt.

Fakt 10.2.2. *Jeśli A, B są przekształceniami liniowymi o macierzach $m(A)$ i $m(B)$, zaś $m(A \circ B)$ jest macierzą złożenia tych przekształceń, to*

$$m(A \circ B) = m(A) \cdot m(B).$$

Dowód. Przyjmijmy, że przekształcenia A, B dane są wzorami:

$$A : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \qquad B : \begin{cases} x' = px + qy \\ y' = rx + sy \end{cases}.$$

Obliczmy wzór złożenia $A \circ B$:

$$\begin{aligned} x'' &= ax' + by' = a(px + qy) + b(rx + sy) = (ap + br)x + (aq + bs)y, \\ y'' &= cx' + dy' = c(px + qy) + d(rx + sy) = (cp + dr)x + (cq + ds)y, \end{aligned}$$

$$A \circ B : \begin{cases} x' = (ap + br)x + (aq + bs)y \\ y' = (cp + dr)x + (cq + ds)y \end{cases}.$$

Porównując macierz złożenia przekształceń z iloczynym macierzy tych przekształceń kończymy dowód tego faktu:

$$m(A \circ B) = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = m(A) \cdot m(B).$$

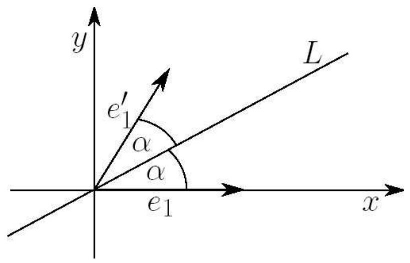
□

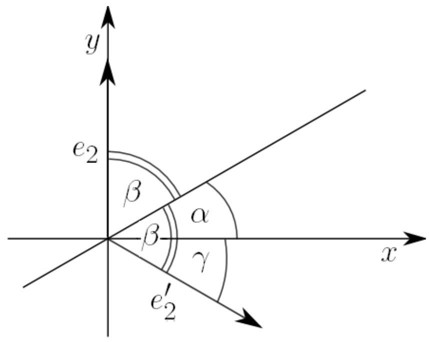
Poniższe ćwiczenie obrazuje zastosowanie Faktu 10.2.2 do rozpoznawania złożeń przekształceń liniowych.

Ćwiczenie 10.2.3. Jakim przekształceniem jest złożenie dwóch odbić względem prostych przechodzących przez $(0,0)$?

ROZWIĄZANIE:

Oznaczmy przez S_α odbicie względem prostej przechodzącej przez $(0,0)$ i nachylonej do osi Ox pod kątem α. Wyznaczmy najpierw macierz $m(S_\alpha)$. Kolumny macierzy to obrazy wersorów przez to przekształcenie. Rysunki zamieszczone poniżej będą pomocne do obliczenia tych obrazów, które ozanczymy przez $e_1' = S_\alpha \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ i $e_2' = S_\alpha \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.





Obraz e_1' jest wektorem jednostkowym o kącie biegunowym 2α, zatem jego współrzędne to $S_\alpha \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 2\alpha\\ \sin 2\alpha\end{pmatrix}$. Obraz e_2' drugiego wersora ma kąt biegunowy $\gamma = -(\beta-\alpha) = \alpha-\beta = \alpha - \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$. Zatem

$$S_\alpha \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})\\ \sin(2\alpha-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin 2\alpha\\ -\cos 2\alpha\end{pmatrix}.$$

Możemy już zapisać macierz dowolnego odbicia S_α:

$$m(S_\alpha) = \begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}.$$

Przejdźmy teraz do właściwej części tego zadania. Wyznaczmy złożenie odbić $S_\alpha \circ S_\beta$ obliczając iloczyn macierzy tych odbić:

$$m(S_\alpha \circ S_\beta) = m(S_\alpha)\cdot m(S_\beta) = \begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\beta & \sin 2\beta\\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\cos 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta & \cos 2\alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha\cos 2\beta\\ \sin 2\alpha\cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta & \sin 2\alpha\sin 2\beta + \cos 2\alpha\cos 2\beta\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta)\\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta)\end{pmatrix}.$$

Macierz, którą otrzymaliśmy to macierz obrotu o kąt $2(\alpha-\beta)$, zatem

$$S_\alpha \circ S_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}.$$

Omówimy teraz własności mnożenia macierzy. Udowodnimy, że jest ono łączne, a następnie pokażemy, że nie jest przemienne.

Fakt 10.2.4. *Mnożenie macierzy jest łączne, tzn. dla dowolnych macierzy M_1, M_2, M_3 zachodzi równość:*

$$(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3).$$

Dowód. Niech $M_1 = m(T_1), M_2 = m(T_2), M_3 = m(T_3)$ będą macierzami przekształceń liniowych T_1, T_2, T_3. W dowodzie łączności mnożenia macierzy wykorzystamy Fakt 10.2.2 oraz łączność składania przekształceń. Dowód sprowadza się do następującego ciągu równości:

$$\begin{aligned}(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 &= (m(T_1) \cdot m(T_2)) \cdot m(T_3) = m(T_1 \circ T_2) \cdot m(T_3) = \\ &= m\left((T_1 \circ T_2) \circ T_3\right) = m\left(T_1 \circ (T_2 \circ T_3)\right) = \\ &= m(T_1) \cdot m(T_2 \circ T_3) = m(T_1) \cdot (m(T_2) \cdot m(T_3)) = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3).\end{aligned}$$

□

Uwaga 10.2.5. Mnożenie macierzy nie jest przemienne, ponieważ istnieją macierze A, B, dla których

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Poniższy przykład jest dowodem tego, że mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Przykład 10.2.6. Sprawdźmy, że istotna jest kolejność mnożenia macierzy S i R, gdzie $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ jest macierzą odbicia względem osi OX, a $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ macierzą obrotu o $\frac{\pi}{2}$. Obliczmy iloczyny macierzy $S \cdot R$ oraz $R \cdot S$:

$$\begin{aligned} S \cdot R &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ R \cdot S &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy, że $S \cdot R \neq R \cdot S$.

10.2.7. Macierz jednostkowa

Macierz związaną z przekształceniem tożsamościowym, o którym wspominaliśmy już w punkcie 7.3.4, będziemy nazywać **macierzą jednostkową**. Wzór przekształcenia tożsamościowego I, lub inaczej identyczności, to

$$I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + \cdot y \end{pmatrix}.$$

Zatem macierz jednostkowa to

$$m(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Będziemy ją oznaczać literą I, tak samo, jak przekształcenie tożsamościowe. Macierz jednostkowa została wyróżniona spośród innych macierzy, ponieważ pełni ona szczególną rolę wśród innych macierzy, podobną do roli liczby 1 wśród innych liczb. Dla liczb bowiem prawdą jest, że

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

Dla macierzy mamy natomiast:

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\text{lub krócej} \quad M \cdot I = I \cdot M = M.$$

Mówimy, że macierz jednostkowa I jest elementem neutralnym operacji mnożenia macierzy, gdyż pomnożenie przez nią dowolnej macierzy M, obojętnie z której strony, daje w wyniku tą samą macierz M.

10.3 Wyznacznik macierzy

Przyponmnijmy, że wyznacznikiem macierzy $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazywamy liczbę

$$\det M = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Będziemy także stosować inny zapis wyznacznika:

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Podamy teraz fakt dotyczący mnożenia wyznaczników. W dowodzie tego faktu wykorzystamy wiadomości z rozdziału ósmego.

Fakt 10.3.1. *Dla dowolnych macierzy M i N zachodzi następująca własność:*

$$\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N. \tag{10.3.1}$$

Dowód. Moglibyśmy wyliczyć bezpośrednio iloczyn macierzy i jego wyznacznik, a potem porównać z iloczynem wyznaczników tych macierzy. To jednak jest pracochłonne, więc zajmiemy się inną drogą dowodzenia tego faktu.

Wykorzystamy dwie informacje jakie niesie za sobą wyznacznik macierzy:

- znak wyznacznika decyduje o zachowaniu, bądź zmianie orientacji płaszczyzny;
- wartość bezwzględna wyznacznika określa w jakiej proporcji zmienia się pole figur przy przekształceniu liniowym.

Jeśli M, N są macierzami przekształceń liniowych odpowiednio T i S, to $M \cdot N$ jest macierzą złożenia $T \circ S$. Prawdziwość równości (10.3.1) sprawdzimy w dwóch krokach: co do znaku i co do wartości bezwzględnej.

1. Badamy znak wyznacznika $\det(M \cdot N)$.
   - $\det(M \cdot N) > 0$, gdy $T \circ S$ zachowuje orientację, a to zachodzi kiedy oba przekształcenia T i S zachowują orientację, bądź oba ją zmieniają. W takich przypadkach $\det M \cdot \det N > 0$, czyli znaki w równości (10.3.1) zgadzają się.
   - $\det(M \cdot N) < 0$, gdy $T \circ S$ zmienia orientację, czyli gdy T zachowuje orientację a S zmienia, bądź na odwrót. Wtedy także znaki po obu stronach równości (10.3.1) się zgadzają, bo $\det M \cdot \det N < 0$.
2. Badamy wartość bezwzględną obu stron równości (10.3.1), czyli sprawdzamy, że
$$|\det(M \cdot N)| = |\det M| \cdot |\det N|.$$
   Jest to prawda, ponieważ przekształcenie T zmienia pola figur w proporcji $|\det M|$, a S w proporcji $|\det N|$. Zatem złożenie tych przeszktałceń zmienia pola w proporcji $|\det M| \cdot |\det N|$, co jest równe $|\det(M \cdot N)|$.

Przeprowadzone rozumowanie wystarcza do zakończenia dowodu. Jeśli bowiem dwie liczby rzeczywiste są równe co do wartości bezwzględnej oraz mają jednakowe znaki, to są one równe. Zatem z własności 1 i 2 wynika równość (10.3.1). □

10.4 Macierz odwrotna

W zrozumieniu definicji macierzy odwrotnej do danej pomoże nam pojęcie odwrotności danej liczby. Odwrotnością liczby a nazywamy taką liczbę b, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$ (np. $\frac{1}{5}$ jest odwrotnością liczby 5). W podobny sposób, używając macierzy zamiast liczb, definiujemy macierz odwrotną. Wykorzystujemy tu informaję, że macierz jednostkowa odgrywa podobną rolę wśród macierzy, jak liczba 1 wśród liczb (patrz punkt 10.2.7).

Definicja 10.4.1. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy taką macierz B, że
$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$
Oznaczamy ją symbolem A^{-1}.

Fakt, który przedstawiamy poniżej mówi o tym, że dana macierz może mieć co najwyżej jedną macierz odwrotną. Stąd też uzasadnione jest stosowanie specjalnego oznaczenia M^{-1} na macierz odwrotną do M.

Fakt 10.4.2. *Jeśli macierz M ma macierz odwrotną, to jest ona jedyna.*

Dowód. Załóżmy, że istnieją dwie różne macierze M_1 i M_2 odwrotne do danej macierzy M. Pokażemy, że są one równe. Z definicji wiemy, że $M_1 \cdot M = I$ oraz $M \cdot M_2 = I$. Korzystając z łączności mnożenia macierzy otrzymujemy:
$$M_1 = M_1 \cdot I = M_1(M \cdot M_2) = (M_1 \cdot M)M_2 = I \cdot M_2 = M_2.$$
Zatem macierze M_1 i M_2 są równe, a więc nie ma możliwości, by istniała więcej niż jedna macierz odwrotna do danej macierzy. □

Kolejny fakt informuje nas o powiązaniu macierzy odwrotnej do danej z przekształceniem odwrotnym do danego przekształcenia liniowego. Przypomnijmy, że przekształcenie odwrotne do przekształcenia liniowego, o ile istnieje, też jest liniowe (Wniosek 7.4.2).

Fakt 10.4.3. *Niech $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwracalnym przekształceniem liniowym. Wówczas macierz $m(T^{-1})$ jest macierzą odwrotną do macierzy $m(T)$. Z kolei, jeśli M jest macierzą przekształcenia liniowego T, posiadającą macierz odwrotną M^{-1}, to M^{-1} jest macierzą przekształcenia T^{-1} odwrotnego do T.*

Dowód. Uzasadnienie pierwszej części tego faktu polega na sprawdzeniu z definicją, że $m(T^{-1})$ jest macierzą odwrotną do $m(T)$:

$$\begin{aligned} m(T)\cdot m(T^{-1}) &= m(T\circ T^{-1}) = m(I) = I,\\ m(T^{-1})\cdot m(T) &= m(T^{-1}\circ T) = m(I) = I. \end{aligned}$$

Zakładamy teraz, że $M = m(T)$ i istnieje macierz odwrotna M^{-1}. Mamy zatem:

$$\begin{array}{lclcl} m(T\circ T^{-1}) = I & \Leftrightarrow & m(T)\cdot m(T^{-1}) = I & \Leftrightarrow & M\cdot m(T^{-1}) = I,\\ m(T^{-1}\circ T) = I & \Leftrightarrow & m(T^{-1})\cdot m(T) = I & \Leftrightarrow & m(T^{-1})\cdot M = I. \end{array}$$

Wiemy (z Faktu 10.4.2), że macierz M ma tylko jedną macierz odwrotną, więc z powyższych równości wnioskujemy, że $M^{-1} = m(T^{-1})$. □

Dla niektórych odwracalnych przekształceń liniowych możemy, opierając się na wiedzy z geometrii, łatwo wyznaczyć przekształcenie odwrotne, a co za tym idzie także macierz odwrotną. Spójrzmy na poniższe przykłady.

1. Symetria S względem prostej przechodzącej przez $(0,0)$ jest zarazem sama swoim przekształceniem odwrotnym, a więc $S^{-1} = S$. Zatem mamy:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}^{-1} = m(S^{-1}) = m(S) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

2. Przekształceniem odwrotnym do obrotu o kąt α jest obrót o kąt $-\alpha$. Zachodzi więc równość macierzy $m(R_\alpha^{-1}) = m(R_{-\alpha})$, czyli

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos(-\alpha) & \sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & -\cos(-\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

W obu tych przypadkach możemy sprawdzić, że otrzymane macierze odwrotne rzeczywiście spełniają równości z Definicji 10.4.1. Sprawdźmy dla obrotu, że obliczenia, które wykonaliśmy stosując wiedzę z geometrii, zgadzają się z obliczeniami algebraicznymi. Pokażemy, więc że $m(R_\alpha)\cdot m(R_\alpha^{-1}) = I$ oraz $m(R_\alpha^{-1})\cdot m(R_\alpha) = I$:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & 0\\ 0 & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & 0\\ 0 & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Macierz, która ma macierz odwrotną, będziemy nazywać **odwracalną**. O tym, w jaki sposób rozpoznawać czy dana macierz jest odwracalna, mówi następujący fakt.

Fakt 10.4.4. *Macierz M jest odwracalna* $\iff \det M \neq 0$.

Dowód. Niech M będzie macierzą przekształcenia liniowego T. Na podstawie Faktu 10.4.3 wiemy, że M będzie odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie T będzie odwracalne, a to natomiast zachodzi dokładnie wtedy, gdy wyznacznik tego przekształcenia jest niezerowy (Fakt 7.4.1), czyli gdy $\det M \neq 0$. □

Przykład 10.4.5. Macierz $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ nie jest odwracalna, ponieważ

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = -3 \cdot 4 - 2 \cdot (-6) = 0.$$

W rozdziale siódmym wyznaczyliśmy wzór przekształcenia odwrotnego i jego macierz. Teraz obliczymy ponownie macierz odwrotną do danej, tym razem odwołując się do definicji macierzy odwrotnej.

Mamy daną odwracalną macierz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, czyli $\det M \neq 0$. Znajdziemy macierz odwrotną $M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Zgodnie z definicją mamy równość

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ a stąd } \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Porównujemy poszczególne wyrazy macierzy i tworzymy dwa układy równań, które następnie rozwiązujemy metodą wyznacznków.

$$\begin{cases} ax+cy=1 \\ bx+dy=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} az+cw=0 \\ bz+dw=1 \end{cases}$$

$$W = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det M \qquad W = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det M$$

$$W_x = \det \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = d \qquad W_x = \det \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix} = -c$$

$$W_y = \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b \qquad W_y = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = a$$

$$\begin{cases} x = \frac{d}{\det M} \\ y = -\frac{b}{\det M} \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -\frac{c}{\det M} \\ w = \frac{b}{\det M} \end{cases}$$

Możemy już zapisać macierz odwrotną do M:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\det M} & -\frac{b}{\det M} \\ -\frac{c}{\det M} & \frac{b}{\det M} \end{pmatrix}. \tag{10.4.1}$$

Określając iloczyn macierzy przez liczbę jako $t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix}$ możemy zapisać krócej, że

$$\diamondsuit \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit \tag{10.4.2}$$

Przykład 10.4.6. Obliczmy macierz odwrotną do $M = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\det M = 5, \quad \text{więc} \quad M^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -1 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

10.5 Macierzowa interpretacja układu równań liniowych

Układ równań liniowych $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$ można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Jeśli $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, to możemy zapisać ten układ krócej $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.
Zauważmy, że jeśli pomnożymy tą równość z lewej strony przez macierz odwrotną M^{-1} to otrzymamy:

$$\begin{aligned} M^{-1} \cdot M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie możemy zatem łatwo wyznaczyć wyliczając macierz odwrotną, ponieważ jest ono wynikiem działania macierzy M^{-1} na wektorze $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{W} \begin{pmatrix} dp - bq \\ -cp + aq \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{W}(dp - bq) = \frac{W_x}{W}, \qquad y = \frac{1}{W}(aq - cp) = \frac{W_y}{W}.$$

Przykład 10.5.1. Znajdźmy rozwiązanie układu $\begin{cases} 4x+5y=6 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$.
Zapiszmy go w postaci macierzowej $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. Obliczmy teraz macierz odwrotną:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4\cdot 1 - 2\cdot 5}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie otrzymamy w wyniku działania wyliczoną macierzą odwrotną na wektor utworzony z wyrazów wolnych $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\cdot 6 + \frac{5}{6}\cdot(-3) \\ \frac{1}{3}\cdot 6 - \frac{2}{3}\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Rozdział 11

Wartości, wektory własne i diagonalizacja macierzy

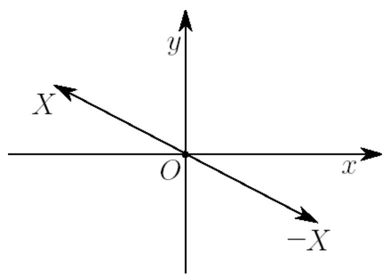
11.1 Wartości i wektory własne

Definicja 11.1.1. Liczbę rzeczywistą t nazywamy **wartością własną** przekształcenia liniowego A, jeśli istnieje niezerowy wektor $\vec{v}$ taki, że

$$A(\vec{v}) = t \cdot \vec{v}.$$

Przykład 11.1.2.

Wartością własną symetrii środkowej S wokół punktu $(0, 0)$ jest liczba -1. Istnieje bowiem wektor X, dla którego $S(X) = -X = -1 \cdot X$. W tym przypadku każdy wektor spełania ten warunek.

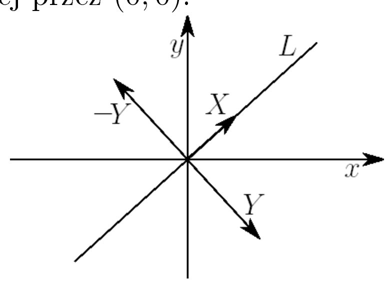


Z wartościami własnymi nierozerwalnie związane jest pojęcie wektorów własnych.

Definicja 11.1.3. Każdy wektor $\vec{v}$ spełaniający $A(\vec{v}) = t \cdot \vec{v}$ nazywamy **wektorem własnym** przekształcenia liniowego A odpowiadającym wartości własnej t.

Przykład 11.1.4. Wyznaczmy wartości własne i odpowiadające im wektory własne symetrii S_L względem prostej L przechodzącej przez $(0, 0)$.

Wektory X leżące na prostej L są wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej 1, ponieważ mamy, że $S_L(X) = X = 1 \cdot X$.
Wektory Y, które są prostopadłe do prostej L są wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej -1, ponieważ $S_L(Y) = -Y = -1 \cdot Y$.



11.2 Równanie charakterystyczne

W powyższym Przykładzie 11.1.4 znaleźliśmy dwie wartości własne danego przekształcenia, ale nie mamy pewności, czy to już są wszystkie wartości własne, czy istnieją może jeszcze inne. Odpowiemy na to pytanie po przeprowadzeniu ogólnego rozumowania pokazującego jak znaleźć wszystkie wartości własne dowolnego przekształcenia liniowego.

Niech A będzie dowolnym przekształceniem liniowym o wzorze $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$. Jeśli $t \in \mathbb{R}$ jest szukaną wartością własną tego przekształcenia, to zgodnie z definicją istnieje taki wektor $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq 0$, dla którego prawdziwa jest równość:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tx\\ty\end{pmatrix}.$$

Mamy wtedy:

$$\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tx\\ty\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+by = tx \\ cx+dy = tx \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-t)x+by = 0 \\ cx+(d-t)y = 0 \end{cases}.$$

W powyższym układzie równań potraktujmy na chwilę a, b, c, d i t jako dane, zaś x, y jako niewiadome. Dla takiego układu rozwiązaniem jest zawsze $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Gdyby wyznacznik macierzy tego układu był niezerowy, tzn. $\det\begin{pmatrix}a-t & b\\ c & d-t\end{pmatrix} \neq 0$, to nie było by innych rozwiązań, bo wtedy układ ma tylko jedno rozwiązanie (patrz Twierdzenie 5.2.2), czyli wymienione wcześniej $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Wiemy jednak, że istnieje przynajmniej jedno niezerowe rozwiązanie $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, zatem musi zachodzić warunek $\det\begin{pmatrix}a-t & b\\ c & d-t\end{pmatrix} = 0$, który jest konieczny, by istniało więcej niż jedno rozwiązanie.

Definicja 11.2.1. Równaniem charakterystycznym przekształcenia liniowego zadanego macierzą $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ nazywamy równanie

$$\det\begin{pmatrix}a-t & b\\ c & d-t\end{pmatrix} = (a-t)(d-t) - cb = 0. \tag{11.2.1}$$

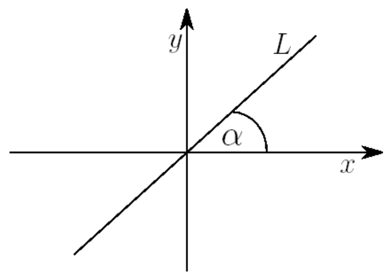
W równaniu tym jako niewiadomą traktujemy t.

Z powyższych rozważań możemy wyciągnąć następujący wniosek.

Wniosek 11.2.2. Każda wartość własna przekształcenia liniowego A jest pierwiastkiem równania charakterystycznego tego przekształcenia.

Wróćmy teraz do Przykładu 11.1.4 i wyznaczmy na podstawie powyższego wniosku wszystkie wartości własne występującego tam przekształcenia.

Przykład 11.2.3. Znajdźmy wszystkie wartości własne symerii S_L względem prostej L przechodzącej przez $(0, 0)$.
Macierz przekształcenia S_L, jak wyliczyliśmy w Ćwiczeniu 10.2.3, to



$$m(S_L) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Z równania charakterystycznego wyznaczymy takie liczby rzeczywiste t, które mogą być wartościami własnymi przekształcenia S_L:

$$\begin{gathered} \det \begin{pmatrix} \cos 2\alpha - t & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha - t \end{pmatrix} = 0 \\ (\cos 2\alpha - t)(-\cos 2\alpha - t) - \sin^2 2\alpha = 0 \\ -\cos^2 2\alpha + t^2 - \sin^2 2\alpha = 0 \\ t^2 - 1 = 0 \\ t = 1 \quad \text{lub} \quad t = -1. \end{gathered}$$

Wiemy z Przykładu 11.1.4, że 1 i -1 są wartościami własnymi tego przekształcenia, a ponieważ równanie charakterystycznie nie ma innych pierwiastków, to także nie ma więcej wartości własnych symetrii S_L.

Przytoczymy teraz twierdzenie, które jest uzupełnieniem Wniosku 11.2.2.

Twierdzenie 11.2.4. *Liczba $t_0 \in \mathbb{R}$ jest wartością własną przekształcenia liniowego A danego macierzą $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ t_0 jest pierwastkiem równania charakterystycznego tego przekształcenia.*

Powyższe twierdzenie różni się od Wniosku 11.2.2 tym, że gwarantuje iż każdy pierwiastek równania charakterystycznego jest wartością własną. Do dowodu tej nieuzasadnionej wcześniej części twierdzenia potrzebny nam będzie następujący fakt.

Fakt 11.2.5. *Jeśli M jest taką macierzą, że $\det M = 0$, to istnieje pewien niezerowy wektor X, dla którego $M \cdot X = 0$.*

Dowód. Dla macierzy $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zakładamy, że $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0$. Rozważmy wektory $X_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ i $X_2 = \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$. Mamy wtedy:

$$M \cdot X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab + ab \\ -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \det M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M \cdot X_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ad + bc \\ -cd + cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\det M \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jeśli któryś z wektorów X_1 lub X_2 jest niezerowy, to pokazaliśmy tezę faktu. Jeśli zaś oba wektory są zerowe, czyli $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0$ i $\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} = 0$, to mamy, że

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wtedy natomiast dla dowolnego wektora X zachodzi $M \cdot X = 0$ i spełniona jest teza faktu. □

Możemy już przejść do dowodu Twierdzenia 11.2.4.

Dowód. Pokażemy, że zachodzą dwie implikacje.

($\Rightarrow$) Implikacja ta jest po prostu Wnioskiem 11.2.2, którego uzasadnienie zawiera się w poprzedzającym go rozumowaniu.

($\Leftarrow$) Zakładamy, że t_0 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, czyli że $\det \begin{pmatrix} a - t_0 & b \\ c & d - t_0 \end{pmatrix} = 0$. Z Faktu 11.2.5 wiemy, że wobec tego istnieje taki wektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, że $\begin{pmatrix} a - t_0 & b \\ c & d - t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Wtedy mamy

$$\begin{cases} (a - t_0)x + by = 0 \\ cx + (d - t_0)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = t_0 x \\ cx + dy = t_0 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ostatni zapis oznacza dokładnie to, że t_0 jest wartością własną przekształcenia o macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

□

Przekształcenia liniowe utożsamiamy z macierzami, zatem pojęcia wprowadzone w tym rozdziale możemy także określić dla macierzy.
Wartość własna i wektor własny macierzy M to wartość własna i wektor własny przekształcenia zadanego tą macierzą.
Wielomian charakterystyczny macierzy $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ to wielomian oznaczany symbolem $\chi_M(t)$ i równy

$$\chi_M(t) = \det \begin{pmatrix} a - t & b \\ c & d - t \end{pmatrix} = (a - t)(d - t) - bc = t^2 - (a + d)t - bc + ad.$$

Korzystając z tych pojęć i wcześniej udowodnionego Twierdzenia 11.2.4 możemy sformułować dwa wnioski.

Wniosek 11.2.6.

1. Liczba $t_0 \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy M $\Leftrightarrow$ t_0 jest pierwiastkiem wielomianu $\chi_M(t)$.

2. Dla dowolnej macierzy M mamy jedną, dwie, lub zero wartości własnych.

Drugi wniosek wynika z pierwszego oraz z faktu, że wielomian charakterystyczny jest równaniem kwadratowym, a więc może mieć dwa, jedno bądź zero rozwiązań.

Przykład 11.2.7. Znajdźmy wartości własne macierzy $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zgodnie z Wnioskiem 11.2.6 szukamy pierwistków wielomianu charakterystycznego:

$$\chi_M(t) = \begin{vmatrix} 4-t & 0 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = (4-t)(1-t).$$

Jak łatwo zauważyć są dwa pierwiastki tego wielomianu $t = 4$ i $t = 1$, zatem te liczby są wartościami własnymi macierzy M.

11.3 Macierze symetryczne

W tym podrozdziale omówimy twierdzenia, które nie zachodzą dla wszystkich macierzy, a tylko dla pewnych szczególnych, zwanych macierzami symetrycznymi.

Definicja 11.3.1. Macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dla której $b = c$ nazywamy **macierzą symetryczną**.

Postać ogólna macierzy symetrycznych to zatem $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Przykład 11.3.2. Macierz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ jest symetryczna, zaś macierz $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ nie jest symetryczna.

Wyznaczymy teraz wartości własne dla macierzy symetrycznej $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Obliczmy jej wielomian charakterystyczny:

$$\chi_M(t) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{vmatrix} = (a-t)(c-t) - b^2 = t^2 - (a+c)t + ac - b^2.$$

Wartości własne to pierwiastki wielomianu $\chi_M(t)$, zatem znajdujemy je rozwiązując równanie

$$\chi_M(t) = t^2 - (a+c)t + ac - b^2 = 0.$$

Wyróżnik Δ tego równania kwadratowego wynosi

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+c)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Rozważmy dwa przypadki w zależności od tego, czy wyróżnik jest równy 0, czy dodatni.

- Gdy $\Delta = 0$ wtedy M ma dokładnie jedną wartość własną. Mamy wtedy

  $$\Delta = (a-c)^2 + 4b^2 = 0 \quad \text{stąd} \quad a = c \ i \ b = 0.$$

  Zatem macierz ma postać $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ i jest to macierz jednokładności o skali a. Jej jedyna wartość własna to pierwiastek t_0 równy

  $$t_0 = \frac{a+c}{2} = \frac{2a}{a} = a.$$

- Gdy $\Delta > 0$ wtedy M ma dwie wartości własne. Są one następujące:

  $$t_1 = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2},$$

  $$t_2 = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}.$$

Z powyższych rozważań otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 11.3.3. *Przekształcenie liniowe o macierzy symetrycznej jest albo jednokładnością, albo ma dwie różne wartości własne.*

W poniższym ćwiczeniu przekonamy się, że faktycznie dla przekształcenia o macierzy symetrycznej, różnego od jednokładości, istnieją dwie wartości własne. Wyliczymy je i znajdziemy odpowiadające im wektory własne.

Ćwiczenie 11.3.4. Znajdź wartości i wektory własne macierzy $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

ROZWIĄZANIE:

Szukamy pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy M:

$$\chi_M(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -2 \\ -2 & -1-t \end{vmatrix} = (2-t)(-1-t) - 4 = -2 - 2t + t + t^2 - 4 = \\ = t^2 - t - 6,$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25,$$
$$t_1 = \frac{1-5}{2} = -2, \qquad t_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Otrzymaliśmy dwie wartości własne, a teraz do każdej z nich znajdziemy wektory własne. Zgodnie z definicją szukany wektor własny X_1 odpowiadający wartości własnej $t_1 = -2$ musi spełniać równość $M \cdot X_1 = t_1 \cdot X_1$. Mamy zatem

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2y_1 = -2x_1 \\ -2x_1 - y_1 = -2y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 = 2y_1 \\ 2x_2 = y_1 \end{cases}.$$

Oba równania powyższego układu sprowadzają się do równania $y_1 = 2x_1$. Zatem wektory własne odpowiadające wartości własnej t_1 mają postać:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

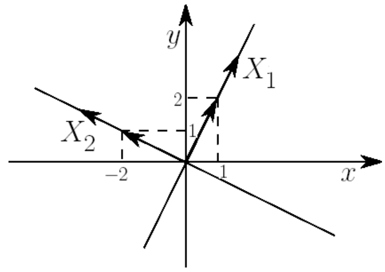
Takich wektorów jest nieskończenie wiele. Wszystkie one leżą na prostej przechodzącej przez $(0,0)$ o wektorze kierunkowym $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wektory własne X_2 odpowiadające wartości własnej $t_2 = 3$ znajdujemy w analogiczny sposób. Mają one postać:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Uwaga 11.3.5.

Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym macierzy z powyższego przykładu są prostopadłe. Widać to z rysunku obok, ale dla sprawdzenia obliczmy iloczyn skalarny, który dla wektorów prostopadłych ma być równy zero:



$$X_1 \circ X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot (-2y_2) + 2x_1 \cdot y_2 = 0.$$

Powyższą uwagę możemy uogólnić dla dowolnej macierzy symetrycznej.

Twierdzenie 11.3.6. *Niezerowe wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym t_1, t_2 przekształcenia liniowego A zadanego macierzą symetryczną $m(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ są do siebie prostopadłe.*

Dowód. Chcemy aby macierz symetryczna $m(A)$ miała dwie różne wartości własne. Będziemy korzystać z obliczeń wykonanych na początku tego podrozdziału. Przypomnijmy, że pierwiastki wielomianu charakterystycznego równe wartościom własnym dla macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ wynoszą:

$$t_{1,2} = \frac{a + c \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{gdzie} \quad \Delta = (a - c)^2 + 4b^2.$$

Możemy przyjąć, że $\Delta \neq 0$, bo zakładamy, że $m(A)$ ma dwa różne pierwiastki. Jako że Δ jest sumą kwadratów liczb $a - c$ i $2b$ oraz że jest różna od zera, wykluczamy więc możliwość, że jednocześnie $a - c = 0$ i $b = 0$. Wektorów własnych szukamy zatem rozważając osobno przypadki dla $b = 0$ i dla $b \neq 0$.

- Gdy $b = 0$.

  Wtedy $\Delta = (a - c)^2$, a skoro zakładaliśmy, że $\Delta \neq 0$, to $a \neq c$. Wobec tego

  $$t_{1,2} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2}}{2} = \frac{a + c \pm |a - c|}{2}, \text{ stąd } t_1 = a,\ t_2 = c.$$

  Wektory własne mają postać odpowiednio $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, bo:

  $$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cy \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

  Pary wektorów własnych odpowiadające różnym wartościom własnym, czyli np. $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, są prostopadłe. Możemy to sprawdzić licząc ich iloczyn skalarny, albo zauważyć, że leżą one na prostych wyznaczonych przez wersory, które jak wiemy są do siebie prostopadłe.

- Gdy $b \neq 0$.

  Wyliczamy wektory własne dla każdej z wartości własnych. Najpierw zróbmy to dla $t_1 = \frac{a+c+\sqrt{\Delta}}{2}$:

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \tfrac{a+c+\sqrt{\Delta}}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
  $$\begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ bx_1 + cy_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+c+\sqrt{\Delta}}{2} \cdot x_1 \\ \frac{a+c+\sqrt{\Delta}}{2} \cdot y_1 \end{pmatrix}.$$

  Porównując pierwsze współrzędne otrzymujemy równość:

  $$by_1 = \frac{c - a + \sqrt{\Delta}}{2} \cdot x_1, \quad \text{a stąd} \quad y_1 = \frac{c - a + \sqrt{\Delta}}{2b} \cdot x_1.$$

Porwónując drugie współrzędne dostalibyśmy także po przekształceniach taką samą zależność y_1 od x_1, więc wystarczy tylko powyższe wyliczenie. Ostatecznie możemy już zapisać ogólną postać wektorów własnych odpowiadający wartości własnej t_1:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \cdot x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \end{pmatrix}.$$

Wektory własne dla $t_2 = \frac{a+c-\sqrt{\Delta}}{2}$ wyliczamy w podobny sposób, jednak podamy od razu ogólną postać tych wektorów:

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2b} \cdot x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2b} \end{pmatrix}.$$

Pozostaje sprawdzić, że każde dwa wektory odpowiadające różnym wartościom własnym są do siebie prostopadłe, a więc pytamy, czy każdy wektory postaci X_1 jest prostopadły do każdego wektora postaci X_2. Obliczmy iloczyn skalarny:

$$\begin{aligned} X_1 \circ X_2 &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \end{pmatrix} x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2b} \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2b} \end{pmatrix} = \\ &= x_1 \cdot x_2 \left(1 + \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \cdot \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2b}\right) = x_1 \cdot x_2 \left(1 + \frac{(c-a)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4b^2}\right) = \\ &= x_1 \cdot x_2 \left(1 + \frac{(c-a)^2 - \Delta}{4b^2}\right) = x_1 \cdot x_2 \left(1 + \frac{(c-a)^2 - ((a-c)^2 + 4b^2)}{4b^2}\right) = \\ &= x_1 \cdot x_2 \left(1 + \frac{(c-a)^2 - (a-c)^2 - 4b^2)}{4b^2}\right) = x_1 \cdot x_2 \left(1 - \frac{4b^2}{4b^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Iloczyn skalarny jest równy zero, co oznacza, że wektory własne dla różnych wartości własnych są parami prostopadłe.

□

Opiszemy teraz pewne szczególne przekształcenie liniowe T, dzięki któremu wyciągniemy następnie ciekawy wniosek dotyczący geometycznej natury przekształceń zadanych macierzami symetrycznymi.

Przyjmijmy, że dla przekształenia T wersor $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej t_1, a $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym wartości t_2. Zachodzą zatem równości:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Znając obrazy wersorów możemy już zapisać macierz przekształcenia T:

$$m(T) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}.$$

Macierz tego przekształcenia jest równa iloczynowi macierzy $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$. Rzeczywiście mamy, że

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}.$$

Wymienione wyżej macierze to kolejno macierze powinowactwa prostokątnego względem osi Oy o skali t_1 i powinowactwa względem Ox o skali t_2. Zauważmy, że oś Oy jest prostopadła do wektorów własnych o wartości własnej t_1, a oś Ox prostopadła do wektora własnego drugiej wartości własnej.

Wniosek 11.3.7. Przekształcenie T o dwóch wartościach własnych t_1, t_2, zadane macierzą $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$ jest złożeniem dwóch powinowactw prostokątnych o skalach równych wartościom własnym T i osiach odpowiednio prostopadłych do wektorów własnych odpowiadającym tym wartościom własnym.

Zajmijmy się teraz przekształceniem T danym macierzą symetryczną $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, gdzie $b \neq 0$ (wtedy mamy dwie różne wartości własne). Niech t_1, t_2 będą wartościami własnymi przekształcenia T, a X_1, X_2 odpowiednio wektorami własnymi dla tych wartości własnych. Wiemy z Twierdzenia 11.3.6, że X_1, X_2 są względem siebie prostopadłe, ponieważ odpowiadają różnym wartościom własnym. Wyznaczmy zatem współliniowe z tymi wektorami osie nowego układu współrzędnych. W tym nowym układzie rozważmy przekształcenie S, które jest złożeniem powinowactw o osiach odpowiednio zgodnych z osiami nowego układu i o skalach równych odpowiednio wartościom własnym t_1 i t_2. Poprzez analogię z Wnioskiem 11.3.7 stwierdzamy, że S w nowym układzie wyraża się macierzą $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$. Do dalszych rozważań potrzebny nam będzie poniższy pomocniczy fakt.

Fakt 11.3.8. *Niech T, S będą liniowymi przekształceniami płaszczyzny. Jeśli dla pewnych niewspółliniowych wektorów $X, Y \in \mathbb{R}^2$ mamy, że $T(X) = S(X)$ oraz $T(Y) = S(Y)$, to przekształcenia T i S są równe.*

Dowód. Przypomnijmy najpierw, że dowolny wektor płaszczyzny można rozłożyć w kombinację liniową wektorów niewspółliniowych (Fakt 2.10.2). Niech więc wektorami rozkładu będą wektory X i Y takie, jak w założeniu. Mamy zatem, że dla dowolnego $Z \in \mathbb{R}^2$

$$Z = t \cdot X + s \cdot Y \qquad \text{dla pewnych } t, s \in \mathbb{R}.$$

Korzystając z tego, że przekształcenia T i S, jako liniowe, zachowują kombinacje liniowe wektorów, a także z założonych równości $T(X) = S(X)$ i $T(Y) = S(Y)$ mamy:

$$\begin{aligned} T(Z) &= T(t \cdot X + s \cdot Y) = t \cdot T(X) + s \cdot T(Y) = t \cdot S(X) + s \cdot S(Y) = \\ &= S(t \cdot X + s \cdot Y) = S(Z). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc, że obraz wektora Z przez T i obraz Z przez S są jednakowe. Wobec dowolności wektora Z mamy, że $T = S$. □

Pokażemy teraz, że przekształcenia T i S, którymi się zajmujemy są równe. W tym celu posłużymy się powyższym faktem. Porównajmy obrazy przez oba te przekształcenia wektorów własnych X_1, X_2. Mamy oczywiście, że

$$T(X_1) = t_1 \cdot X_1, \quad T(X_2) = t_2 \cdot X_2,$$

bo są to wektory własne przekształcenia T. Przekształcenie S wyrażone jest w nowym układzie, zatem zapiszmy także wektory X_1 i X_2 w nowych współrzędnych. Zauważmy, że wektory te pokrywają się z osiami układu, zatem odpowiednią, jedną ze współrzędnych będą miały zerową. Niech więc $X_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y'_2 \end{pmatrix}$. Mamy wtedy:

$$S(X_1) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \cdot x'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \cdot X_1,$$

$$S(X_2) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \cdot y'_2 \end{pmatrix} = t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y'_2 \end{pmatrix} = t_2 \cdot X_2.$$

Otrzymaliśmy więc, że $T(X_1) = S(X_1)$ oraz $T(X_2) = S(X_2)$, co zgodnie z Faktem 11.3.8, wystarcza aby stwierdzić, że $T = S$.

Z powyższych rozważań wynikają następujące wnioski.

Wniosek 11.3.9. Przekształcenie liniowe o macierzy symetrycznej $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ w układzie współrzędnych, którego osie wyznaczone są przez wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym t_1, t_2 tego przekształcenia, zadane jest macierzą

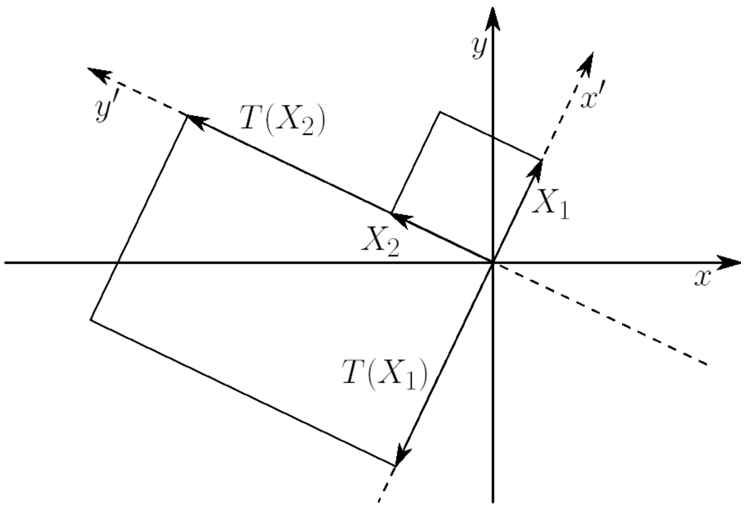
$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wniosek 11.3.10. Przekształcenie liniowe T o macierzy symetrycznej $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ jest złożeniem powinowactw prostokątnych o skalach równych wartościom własnym T i o osiach odpowiednio współliniowych z wektorami własnymi odpowiadającymi tym wartościom własnym.

Przykład 11.3.11. Przekształcenie T o macierzy $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ z Ćwiczenia 11.3.4 jest złożeniem powinowactw prostokątnych:

- o osi wyznaczonej przez wektor własny $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i skali -2,
- o osi wyznaczonej przez wektor własny $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i skali 3.

Dobierając układ współrzędnych o osiach wyznaczonych przez wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ macierz tego przekształcenia zapisujemu jako $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.



11.4 Diagonalizacja macierzy

W tym podrozdziale zajmiemy się metodą, zwaną **diagonalizacją**, pokazującą związek pomiędzy dowolną macierzą o określonych wartościach własnych, a macierzą prostszej postaci (macierzą diagonalną), ale mającą te same wartości własne.

Definicja 11.4.1. Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie wyrazy poza główną przekątną są zerowe.

Przykład 11.4.2. Macierzami diagonalnymi są np:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Definicja 11.4.3. Niech $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ będą liniowo niezależnymi wektorami. Macierz $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ nazywamy **macierzą przejścia** od wersorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ do wektorów X_1 i X_2.

Podamy teraz trzy fakty, które następnie prowadzą do wniosku opisującego zależność między daną macierzą a macierzą diagonalną o tych samych wartościach własnych co ta macierz.

Fakt 11.4.4. *Dla dowolnej macierzy* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *oraz macierzy przejścia* $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ *iloczyn* $M \cdot P = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ *jest macierzą, której kolumny spełniają zależności:*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Dowód. Obliczamy iloczyn macierzy $M \cdot P$:

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}.$$

Pozostaje sprawdzić, że zachodzą podane wyżej zależności:

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} \quad \text{– pierwsza kolumna macierzy} M \cdot P,$$

$$M \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix} \quad \text{– druga kolumna macierzy} M \cdot P.$$

□

Wprowadźmy teraz kilka oznaczeń, które będą obowiązywać w dwóch kolejnych faktach i końcowym wniosku.

- Niech M będzie macierzą o dwóch różnych wartościach własnych t_1, t_2.
- $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ i $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ niech będą niezerowymi wektorami własnymi odpowiadającymi odpowiednio wartościom własnym t_1, t_2.
- Przez D_M oznaczmy macierz diagonalną $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$ utworzoną z wartości własnych macierzy M.
- Macierz $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ to będzie macierz przejścia od wersorów do podanych wyżej wektorów własnych X_1, X_2 macierzy M.

Fakt 11.4.5. *Wektory X_1, X_2 są liniowo niezależne.*

Dowód. Niech T będzie przekształceniem o macierzy M. Wtedy wektory X_1, X_2, jako wektory własne tego przekształcenia o różnych wartościach własnych t_1, t_2, spełaniają równości: $T(X_1) = t_1 \cdot X_1$ oraz $T(X_2) = t_2 \cdot X_2$. Gdyby wektory te były liniowo zależne, to mielibyśmy, że $X_2 = s \cdot X_1$. Korzystając dodatkowo z jednorodności przekształceń liniowych (Uwaga 10.1.2) otrzymalibyśmy:

$$t_2 \cdot X_2 = T(X_2) = T(s \cdot X_1) = s \cdot T(X_1) = s \cdot t_1 \cdot X_1 = t_1 \cdot s \cdot X_1 = t_1 \cdot X_2.$$

Stąd mielibyśmy, że $t_1 = t_2$, ale to jest sprzeczne z założeniem, że wartości własne tego przekształcenia są różne. □

Fakt 11.4.6. *Dla dowolnej macierzy M o dwóch różnych wartościach własnych zachodzi wzór*

$$M \cdot P = P \cdot D_M. \tag{11.4.1}$$

Dowód. Wyliczamy bezpośrednio lewą i prawą stronę równania.

$$\textit{Lewa:} \quad M \cdot P = M \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1x_1 & t_2x_2 \\ t_1y_1 & t_2y_2 \end{pmatrix},$$

bo z faktu 11.4.4 mamy, że

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1x_1 \\ t_1y_1 \end{pmatrix}, \text{ oraz } \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = t_2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2x_2 \\ t_2y_2 \end{pmatrix}.$$

$$\textit{Prawa:} \quad P \cdot D_M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1x_1 & t_2x_2 \\ t_1y_1 & t_2y_2 \end{pmatrix}.$$

Otrzymaliśmy równość obu stron wzoru (11.4.1). □

Wniosek 11.4.7. Dla dowolnej macierzy M o dwóch różnych wartościach własnych mamy:

$$\Diamond \qquad M = P \cdot D_M \cdot P^{-1}. \qquad \Diamond \tag{11.4.2}$$

Dowód. P jest macierzą odwracalną, ponieważ $\det P = \det(X_1, X_2) \neq 0$, bo X_1, X_2 są liniowo niezależne (Fakt 11.4.5). Zatem istnieje macierz odwrotna P^{-1}. Mnożąc obustronnie równość (11.4.1) z lewej strony przez P^{-1} otrzymujemy równość z tego wniosku. □

Przedstawienie macierzy M w postaci (11.4.2) nazywamy **diagonalizacją**.

Uwaga 11.4.8. Dla macierzy symetrycznych diagonalizacja może być rozumiana jako algebraiczny sposób wyrażenia Wniosku 11.3.9 z poprzedniego podrozdziału.

Uwaga 11.4.9. Istnieją macierze, których nie da się zdiagonalizować. Są to takie macierze, które nie mają wartości własnych, np. macierz obrotu, lub które mają jedną wartość własną, ale nie są postaci $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, np. macierz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tych faktów nie będziemy dowodzić.

11.5 Zastosowanie diagonalizacji

11.5.1. Potęgowanie macierzy

Potęgowanie macierzy jako mnożenie wiele razy tej samej macierzy przez siebie jest bardzo pracochłonne. Ograniczmy się najpierw do prostego przypadku potęgowania macierzy diagonalnych, czyli postaci $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Mamy wtedy:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}.$$

Możemy też udowodnić indukcyjnie, że dla dowolnej potęgi $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

Dowód. Warunek początkowy zachodzi, bo dla $n = 1$ mamy $M^1 = M$.
Krok indukcyjny również łatwo pokazać. Zakładamy prawdziwość tezy dla $n - 1$, czyli, że $M^{n-1} = \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & b^{n-1} \end{pmatrix}$. Pokażemy, że teza zachodzi też dla n. Mamy bowiem:

$$M^n = M^{n-1} \cdot M = \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & b^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

□

Dla dowolnych macierzy M potęgowanie jest już bardziej skomplikowane. Łatwiejszym sposobem jest wykorzystanie do tego diagonalizacji, jeśli oczywiście dla danej macierzy diagonalizacja jest możliwa, a więc np. dla macierzy o dwóch różnych wartościach łasnych. Zgodnie z Wnioskiem 11.4.7 mamy, że $M = PD_MP^{-1}$, a stąd:

$$M^2 = (PD_MP^{-1})(PD_MP^{-1}) = PD_M(P^{-1}P)D_MP^{-1} = PD_M^2P^{-1},$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = PD_M^2P^{-1}PD_MP^{-1} = PD_M^2D_MP^{-1} = PD_M^3P^{-1}.$$

Możemy też łatwo indukcyjnie dowieść (pomijamy dowód), że dla $n \in \mathbb{N}$

$$M^n = (PD_MP^{-1})^n = PD_M^nP^{-1}.$$

Zobaczmy na przykładzie, w jaki sposób potęgujemy macierze, które dają się zdiagonalizować.

Przykład 11.5.2. Obliczmy M^4 dla macierzy $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
Szukamy najpierw wartości i wektory własne dla M. Zatem rozwiązujemy równanie

$$\begin{vmatrix} 3-t & 4 \\ 4 & -3-t \end{vmatrix} = (t-3)(t+3) - 16 = t^2 - 25 = 0,$$

stąd $t_1 = 5$, $t_2 = -5$. Wyznaczmy teraz przykładowe wektory własne X_1, X_2:

- dla $t_1 = 5$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y$

  stąd np. $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- dla $t_2 = -5$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x \\ -5y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 4x - 3y = -5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y$

  stąd np. $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zatem mamy $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i obliczamy P^{-1}:

$$\det P = 5, \quad \text{więc} \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Możemy zatem już obliczyć potęgę M^4 stosując diagonalizację:

$$M^4 = (PDP^{-1})^4 = PD^4P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^4 & 0 \\ 0 & (-5)^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 250 & 125 \\ -125 & 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix}.$$

11.5.3. Ciągi zadane wzorami rekurencyjnymi

Ciągi często opisujemy przez podanie wzoru na wyraz ogólny, z którego możemy wyznaczyć dowolny element ciągu. Jednakże niektóre ciągi zadane są tzw. **wzorem rekurencyjnym**, czyli zawierającym pewne wprost podane wyrazy początkowe i równanie opisujące zależność między danym wyrazem ciągu a poprzednim (poprzednimi). Oto przykład ciągu $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ danego wzorem rekurencyjnym:

$$x_0 = 1, \; x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n + 3x_{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Taki opis jednoznacznie wyznacza ciąg, możemy wypisać jego kolejne wyrazy:

$$\begin{aligned}
&x_2 = 2x_1 + 3x_0 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5\\
&x_3 = 2x_2 + 3x_1 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13\\
&x_4 = 41\\
&\vdots\\
&x_n = ?
\end{aligned}$$

Niestety nie znamy wzoru na ogólny wyraz ciągu, ale wyznaczymy go posługując się diagonalizacją macierzy. Pomysł polega na tym, że wyrażamy parę $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$ poprzez parę $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ korzystając z równości:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + 3x_{n-1} \\ x_n &= x_n \end{aligned}, \quad \text{z których mamy} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Możemy dalej w sposób analogiczny wyrażać kolejne pary, aż dojdziemy do pary utworzonej z wyrazów początkowych $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Oznaczając teraz występującą tu macierz jako $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ możemy zapisać, że

$$(\bigstar) \qquad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Z tej równości będziemy mogli już wyznaczyć wzór na wyraz ogólny x_n używając diagonalizacji macierzy M, by obliczyć jej potęgę. Wartości własne tej macierzy to -1 i 3 (łatwo je obliczyć jednak rachunek pomijamy), a odpowiadające im wektory własne to kolejno $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zatem macierz diagonalna D oraz macierz przejścia P dla macierzy M są następujące:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potrzebujemy jeszcze obliczyć P^{-1}:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystując diagonalizację macierzy M obliczamy M^n:

$$\begin{aligned}
M^n &= PD^nP^{-1} = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -(-1)^n & 3 \cdot 3^n \\ (-1)^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3 \cdot 3^n & -3 \cdot (-1)^n + 3 \cdot 3^n \\ -(-1)^n + 3^n & 3 \cdot (-1)^n + 3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Możemy już z równania (★) obliczyć x_n:

$$\begin{aligned} x_n \quad &= \tfrac{1}{4}\Big(\big(-(-1)^n+3^n\big)\cdot 1+\big(3\cdot(-1)^n+3^n\big)\cdot 1\Big)= \\ &= \tfrac{1}{4}\big(2\cdot(-1)^n+2\cdot 3^n\big)=\tfrac{1}{2}\cdot(-1)^n+\tfrac{1}{2}\cdot 3^n. \end{aligned}$$

Z tego wzoru możemy np. obliczyć

$$x_4=\frac{1}{2}\cdot(-1)^4+\frac{1}{2}\cdot 3^4=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 81=\frac{1}{2}\cdot 82=41.$$

Widzimy, ze wartość ta zgadza się z wartością wyliczoną poprzednio bezpośrednio z rekurencyjnej definicji ciągu.

Poniższa uwaga to obserwacja wynikająca z powyższego przykładu.

Uwaga 11.5.4. Jeśli mamy dane równanie rekurencyjne $x_{n+1}=p\cdot x_n+q\cdot x_{n-1}$ i macierz $\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ o dwóch różnych wartościach własnych t_1,t_2, to wówczas wyraz ogólny x_n wyraża się wzorem

$$x_n=A\cdot t_1^n+B\cdot t_2^n,$$

gdzie A,B są stałymi, które można wyliczyć podstawiając do wzoru ogólnego pierwsze dwa wyrazy ciągu (bo te są dane).

Przykład 11.5.5. Sprawdźmy, że uwaga ta zachodzi dla ciągu, który rozważaliśmy już wcześniej:

$$x_0=1,\ x_1=1,\quad x_{n+1}=2x_n+3x_{n-1}\quad \text{dla } n\geqslant 1.$$

Wartości własne macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ to -1 i 3 zatem szukamy A i B, dla których

$$x_n=A\cdot(-1)^n+B\cdot 3^n.$$

Podstawmy dwa pierwsze wyrazy ciągu:

$$\begin{matrix} 1=x_0=A\cdot(-1)^0+B\cdot 3^n=A+B \\ 1=x_1=A\cdot(-1)^1+B\cdot 3^1=-A+3B \end{matrix}\quad \text{stąd}\quad A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}.$$

Współczynniki te zgadzają się z tymi, które otrzymaliśmy we wcześniejszych obliczeniach.

11.6 Diagonalizacja ortogonalna macierzy symetrycznych

Definicja 11.6.1. Macierz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, dla której wektory utworzone z kolumn, czyli $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ są wektorami długości 1 i są do siebie prostopadłe, nazywamy **macierzą ortogonalną**.

Możemy powiedzieć, jaką postać mają takie macierze, ponieważ jeśli $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ oraz $\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right|$, to $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Zatem macierz ortogonala to

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } a^2 + b^2 = 1.$$

Przykład 11.6.2. Macierze $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ są ortogonalne.

Definicja 11.6.3. Diagonalizacja ortogonalna to przedstawienie macierzy M w postaci $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$, gdzie D jest macierzą diagonalną, a P macierzą ortogonalną.

Fakt 11.6.4. *Każda macierz symetryczna M posiada diagonalizację ortogonalną.*

Dowód. Dla dowolnej macierzy symetrycznej M zachodzi jeden z poniższych dwóch przypadków (Twierdzenie 11.3.3):

(1) M jest postaci $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$;

(2) M ma dwie różne wartości własne.

W pierwszym przypadku diagonalizacja ortogonalna jest bardzo prosta. Macierz M jest diagonalna, dlatego traktujemy ją jako macierz D występującą we wzorze $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Jeśli za macierz P przyjmiemy macierz jednostkową (jest ona ortogonalna), to faktycznie wzór ten będzie spełniony, bo:

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Jeśli zachodzi przypadek drugi, to możemy wtedy dokonać diagonalizacji używając macierzy przejścia P utworzonej z wektorów własnych dla wartości własnych macierzy M. Wiemy z Twierdzenia 11.3.6, że wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym dla macierzy symetrycznych są do siebie prostopadłe. Wystarczy zatem wziąć odpowiednio wektory współliniowe z nimi, ale długości 1. Otrzymamy więc wektory własne jednostkowe i prostopadłe, z których tworzymy macierz przejścia P. Macierz ta jest ortogonalna, tak jak chcieliśmy.

□

Przykład 11.6.5. Przeprowadź ortogonalną diagonalizację macierzy $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
Wynaczmy wartości i wektory własne:

$$\begin{vmatrix} -t & 2 \\ 2 & -3-t \end{vmatrix} = -t(-3-t) - 4 = t^2 + 3t - 4$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$t_1 = -4, \qquad t_2 = 1,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ -4y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y = -4x \\ 2x - 3y = -4y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y = x \\ 2x - 3y = y \end{cases}$$

$$y = -2x \qquad 2y = x$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}.$$

Szukamy teraz takich wektorów własnych, żeby $|X_1| = |X_2| = 1$:

$$\begin{array}{cc} x^2 + (-2x)^2 = 1 & (2y)^2 + y^2 = 1 \\ 5x^2 = 1 & 5y^2 = 1 \\ x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}, & y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}. \end{array}$$

Wektory własne dla wartości własnych -4 i 1 to odpowiednio $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.
Tworzymy z nich macierz przejścia, która jest ortogonalna $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$
i wyliczamy do niej macierz odwrotną (wzór (10.4.2)):

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Możemy już zapisać:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Rozdział 12

Liczby zespolone

12.1 Definicja i działania na liczbach zespolonych

Liczby rzeczywiste możemy poszerzyć o takie liczby, których kwadraty są liczbami ujemnymi. Jeśli oznaczymy przez i liczbę taką, że

$$i^2 = i \cdot i = -1,$$

zwaną **jednostką urojoną**, to dowolną liczbę której kwadrat jest liczbą ujemną możemy zapisać jako

$$x \cdot i = i \cdot x, \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Dla przykładu: $\sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot i$.

Definicja 12.1.1. Każdy symbol postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy **liczbą zespoloną**. Ponadto dwie liczby zespolone $a + bi$ oraz $c + di$ nazywamy **równymi**, gdy $a = c$ oraz $b = d$.

Liczby zespolone oznaczać będziemy symbolami literowymi: z, z_1, z_2, u, w itp.
Liczby rzeczywiste występujące w zapisie liczby zespolonej mają specjalne nazwy. Jeśli $z = a + bi$, to liczbę a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z, zaś b **częścią urojoną**. Piszemy wtedy, że $a = \mathbf{Re}\ z$, $b = \mathbf{Im}\ z$.

Uwaga 12.1.2. Każda liczba rzeczywista a jest szczególnym przypadkiem liczby zespolonej, ponieważ możemy ją zapisać jako $a = a + 0 \cdot i$. Jest to taka liczba zespolona z, dla której $\mathbf{Re}\ z = a$, $\mathbf{Im}\ z = 0$.

Uwaga 12.1.3. Jednostka urojona i jest liczbą zespoloną postaci $0 + 1 \cdot i$. W szczególności, $\mathbf{Re}\ i = 0$, a $\mathbf{Im}\ i = 1$.

12.1.4. Działania na liczbach zespolonych

Określając działania na liczbach zespolonych będziemy wykorzystywać następujące założenia:

- dodawanie i mnożenie jest przemienne;
- mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Cztery podstawowe działania na liczbach zespolonych definiujemy następująco:

1. $(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$

2. $(a+bi)\cdot(c+di)=ac+(ad+bc)i+bdi^2=ac+adi+bci+bd(-1)=$
$=ac-bd+(ad+bc)i$

3. $(a+bi)-(c+di)=a-c+(b-d)i$

4. Opiszemy dwa sposoby wykonywania działania dzielenia liczb zespolonych

$$(a+bi):(c+di),\quad \text{gdzie } c+di\neq 0,\ \text{czyli } (c,d)\neq(0,0).$$

I sposób:
Szukamy takich liczb $x,y\in\mathbb{R}$, które utworzą liczbę zespoloną równą ilorazowi danych liczb, czyli takich, że

$$(a+bi):(c+di)=x+y\cdot i.$$

Mnożenie jest operacją odwrotną do dzielenia zatem $(c+di)(x+yi)=(a+bi)$. Po wymnożeniu i uporządkowaniu wyrazów mamy

$$cx-dy+(dx+cy)i=a+bi.$$

Porównując teraz części rzeczywiste i urojone po obu stronach równości otrzymujemy układ równań, który rozwiązujemy metodą wyznacznikową:

$$\begin{cases} cx-dy=a \\ dx+cy=b \end{cases}$$
$$W=c^2+d^2>0,\quad \text{bo } (c,d)\neq(0,0).$$
$$W_x=\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}=ac+bd$$
$$W_y=\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}=cb-ad$$
$$x=\tfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\tfrac{cb-ad}{c^2+d^2}.$$

Zatem możemy już zapisać działanie dzielenia:

$$(a+bi):(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i.$$

II sposób:
Zapisujemy iloraz w postaci ułamka i korzystając z równości wyliczonej poniżej

$$(c+di)(c-di)=c^2-cdi+cdi-d^2i^2=c^2+d^2$$

mnożymy licznik i mianownik przez odpowiednie wyrażenie:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i.$$

Przećwiczmy teraz poznane działania na liczbach zespolonych wykonując kilka obliczeń.

Przykład 12.1.5. Obliczmy:

a) $3-4i+(2+3i)=3+2+(-4+3)i=5-i$;

b) $\frac{3+i}{2-4i}=\frac{3+i}{2-4i}\cdot\frac{2+4i}{2+4i}=\frac{6-4+(12+2)i}{4+16}=\frac{2+14i}{20}=\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i.$

W następnym ćwiczeniu wykorzystamy fakt, że dwie liczby zespolone są równe, jeśli ich części rzeczywiste i urojone są równe.

Ćwiczenie 12.1.6. Znajdź liczbę zespoloną z spełniającą równość $(5+2i)+z=zi$.
ROZWIĄZANIE:
Zapiszmy liczbę z jako $a+bi$. Mamy wtedy:

$$\begin{gathered}(5+2i)+(a+bi)=(a+bi)i\\(5+a)+(2+b)i=ai+bi^2\\(5+a)+(2+b)i=-b+ai.\end{gathered}$$

Porównując teraz części rzeczywiste i urojone liczb po obu stronach równości otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases}5+a=-b\\2+b=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-5\\a-b=2\end{cases}$$

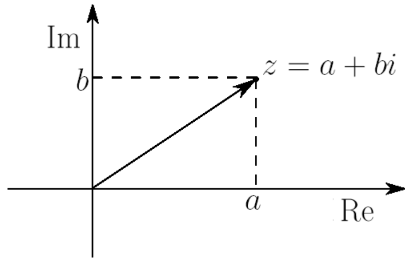
$$W=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2,\quad W_x=\begin{vmatrix}-5&1\\2&-1\end{vmatrix}=3,\quad W_y=\begin{vmatrix}1&-5\\1&2\end{vmatrix}=7,$$

$$\text{zatem}\quad a=\frac{W_x}{W}=-\frac{3}{2},\quad b=\frac{w_y}{W}=-\frac{7}{2}.$$

Szukaną liczbą jest $z=-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}i$.

12.2 Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

Uporządkowana para liczb rzeczywistych wyznacza jednoznacznie liczbę zespoloną. Pierwsza z nich oznacza część rzeczywistą, a druga część urojoną tej liczby. Możemy zatem liczbę zespoloną $z=a+bi$ utożsamiać z punktem (a,b) lub jego wektorem wodzącym $[a,b]$. Dzięki takiej interpretacji liczb zespolonych, możemy je zaznaczać w układzie współrzędnych o osiach **Re** (oś rzeczywista) i **Im** (oś urojona), tak jak to przedstawia rysunek obok. Punkty z osi Re to po prostu liczby rzeczywiste.



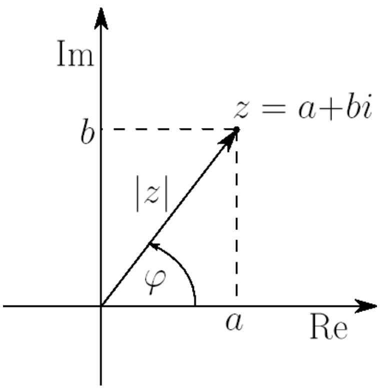
W dalszej części przekonamy się także, że w takim układzie współrzędnych łatwo interpretować działania na liczbach zespolonych. Teraz natomiast poznamy dwie definicje, które odnoszą się do interpretacji liczby zespolonej jako wektora.

Definicja 12.2.1. **Modułem** liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy długość wektora $[a, b]$, z którym utożsamiamy tę liczbę. Oznaczamy go przez $|z|$. Zatem

$$\Diamond \qquad |z| = |a + bi| = |[a, b]| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad \Diamond \tag{12.2.1}$$

Uwaga 12.2.2. Moduł jest uogólnieniem pojęcia wartości bezwzględnej liczb rzeczywistych. Dla $z \in \mathbb{R}$ mamy bowiem, że $|z| = |a + 0 \cdot i| = \sqrt{a^2} = |a|$.

Definicja 12.2.3. **Argumentem** liczby zespolonej $z = a + bi$, oznaczanym $\arg z$, nazywamy kąt biegunowy wektora $[a, b]$.



Na rysunku obok zaznaczony jest kąt φ będący argumentem liczby zespolonej z. Wyznaczamy go analogiczne do wyznaczania kąta biegunowego wektora $[a, b]$. Korzystając z rysunku obok można uzasadnić, że argument φ liczby z spełnia poniższy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{Re z}{|z|} = \cos\varphi \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{Im z}{|z|} = \sin\varphi \end{cases}. \tag{12.2.2}$$

Uwaga 12.2.4. Argument φ, podobnie jak kąt biegunowy wektora, należy do przedziału $[0, 2\pi)$. Jednak istnieją także inne kąty spełniające warunek (12.2.2). Są to kąty równe $\varphi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 12.2.5. Znajdźmy moduł i argument liczby $z = -1 + i$.
Moduł wyliczamy wprost z definicji:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Argument wyznaczymy z warunku (12.2.2):

$$\varphi = \arg z \iff \begin{cases} \cos\varphi = \frac{Re z}{|z|} \\ \sin\varphi = \frac{Im z}{|z|} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

W drugiej ćwiartce układu współrzędnych wartość cosiunsa jest ujemna, a sinusa dodatnia. Zatem

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos 45° = \cos(180° - 45°),$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° = \sin(180° - 45°),$$

a stąd dostajemy, że $\varphi = 135°$.

12.2.6. Postać trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej

Zapis liczby zespolonej z jako $a+bi$ nazywamy **postacią algebraiczną**. Jest możliwy także inny zapis liczby zespolonej, używając jej modułu i argumentu. Te dwie wielkości jednoznacznie wyznaczają liczbę zespoloną, podobnie jak długość i kąt biegunowy wyznaczają wektor. Dla $z = a + bi$ mamy bowiem (z równości (12.2.2)):

$$a = |z| \cdot \cos\varphi, \quad b = |z| \cdot \sin\varphi, \quad \text{gdzie } \varphi = \arg z.$$

Zatem $\quad z = a + bi = |z| \cdot \cos\varphi + |z| \cdot \sin\varphi \cdot i = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Zapis

$$\lozenge \qquad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{gdzie } r = |z|,\ \varphi = \arg z. \qquad \lozenge \tag{12.2.3}$$

nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej z.

Przykład 12.2.7. Zapiszmy liczbę $z = 1 + \sqrt{3}i$ w postaci trygonometrycznej. Obliczmy najpierw moduł r, a także argument φ:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2,$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Liczba z w postaci trygonometrycznej to $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Wprowadźmy oznaczenie $e^{i\varphi}$ na występujące w trygonometrycznej postaci liczby zespolonej wyrażenie $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Skoro więc przyjmujemy, że $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, to wzór (12.2.3) zapisujemy następująco:

$$\lozenge \qquad z = re^{i\varphi}. \qquad \lozenge \tag{12.2.4}$$

Taki zapis nazywamy **postacią wykładniczą** liczby zespolonej z.

Przykład 12.2.8. Liczbę $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ możemy zapisać jako $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Postać trygonometryczna lub też wykładnicza liczby zespolonej jest niekiedy wygodniejsza do użycia niż jej postać algebraiczna. W najbliższym punkcie wykorzystamy te postacie do interpretacji geometrycznej mnożenia liczb zespolonych.

12.2.9. Geometryczna interpretacja dodawania i mnożenia liczb zespolonych

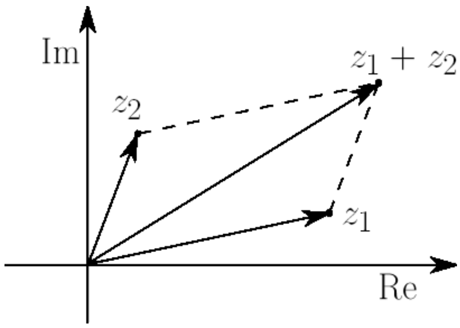
Dodawanie liczb zespolonych zinterpretujemy geometrycznie używając postaci algebraicznej. Jeśli mamy dane liczby $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di,$ to

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

Pamiętamy, że każdą liczbę zespoloną możemy traktować jako wektor wodzący punktu, którego współrzędne to kolejno część rzeczywista i urojona tej liczby. Zatem zapisując wektorowo sumę z_1+z_2 mamy, że

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d].$$

Oznacza to, że dodawanie liczb zespolonych geometrycznie wyraża się dodawaniem wektorów im odpowiadających.



Do interpretacji geometrycznej mnożenia liczb zespolonych wykorzystamy liczby zespolone zapisane w postaci trygonometrycznej: $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Wyliczmy iloczyn $z_1\cdot z_2$:

$$\begin{aligned}
&z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\\
&=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=\\
&=r_1\cdot r_2\big((\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)\big)=\\
&=r_1\cdot r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).
\end{aligned}$$

Na podstawie powyższych obliczeń możemy wyciągnąć następujący wniosek.

Wniosek 12.2.10. Dla dowolnych liczb zespolonych $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ prawdą jest, że:

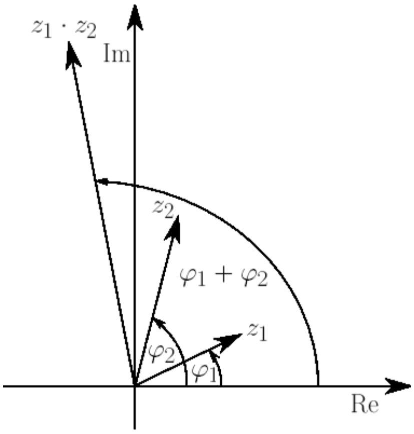
- $|z_1\cdot z_2|=r_1\cdot r_2=|z_1|\cdot|z_2|$ (moduł iloczynu liczb zespolonych jest równy iloczynowi modułów tych liczb);
- $\arg(z_1\cdot z_2)=\varphi_1+\varphi_2=\arg z_1+\arg z_2$ (argument iloczynu liczb zespolonych jest równy sumie argumentów tych liczb).

Uwaga 12.2.11. Gdy liczby z_1,z_2, dla których przeprowadzaliśmy powyższe obliczenia, zapiszemy w postaci wykładniczej $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, to otrzymamy, że

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Mnożenie liczb zespolonych używając postaci wykładniczej jest bardzo wygodne, ponieważ jak widzimy okazuje się, że mnożenie symboli $e^{i\alpha}$ zgadza się z prawami dotyczącymi mnożenia potęg o jednakowych podstawach.

Z prawej strony na rysunku zaznaczone są liczby zespolone z_1, z_2, a także ich iloczyn $z_1\cdot z_2$. Zauważmy, że liczba $z_1\cdot z_2$ powstała z pomnożenia z_1 przez z_2. To zaś oznacza, że argument liczby z_1 został zwiększony o φ_2, a jej moduł zwiększył się r_2-krotnie.

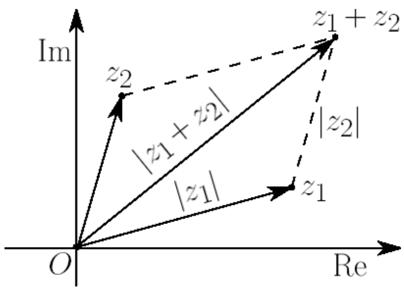


Korzystając z geometrycznej interpretacji liczb zespolonych możemy uzasadnić w prosty sposób pewne fakty bez potrzeby rachunków algebraicznych, a tylko stosując zdobytą wcześniej wiedzę na temat wektorów. Poniższe ćwiczenie to obrazuje.

Ćwiczenie 12.2.12. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzi

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{12.2.5}$$

Dowód. Narysujmy w układzie współrzędnych wektory wodzące odpowiadające liczbom z_1, z_2, $z_1 + z_2$. Dorysujmy pozostałe boki równoległoboku rozpiętego na wektorach z_1, z_2. Rozważmy trójkąt o wierzchołkach $O, z_1, z_1 + z_2$. Zauważmy, że moduły $|z_1, |z_2|, |z_1 + z_2|$ występujące w nierówności (12.2.5) są długościami boków tego trójkąta. Zatem z nierówności trójkąta otrzymujemy nierówność, którą chcieliśmy pokazać. □



12.3 Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych

Oprócz podstawowych działań na liczbach zespolonych wprowadzonych wcześniej, możemy je także potęgować i pierwiastkować. Potęgowanie to nic innego jak wielokrotne mnożenie przez siebie danej liczby. Aby jednak potęgować szybciej i łatwiej, wyprowadzimy ogólny wzór na potęgę liczby zespolonej. Skorzystamy z Wniosku 12.2.10 dotyczącego interpretacji geometrycznej mnożenia liczb zespolonych.
Zbadajmy najpierw moduł i argument drugiej i trzeciej potęgi liczby zespolonej $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$|z^2| = |z \cdot z| = |z| \cdot |z| = |z|^2,$$
$$\arg(z^2) = \arg(z \cdot z) = \arg z + \arg z = 2 \cdot \arg z;$$

$$|z^3| = |z^2 \cdot z| = |z^2| \cdot |z| = |z|^2 \cdot |z| = |z|^3,$$
$$\arg(z^3) = \arg(z^2 \cdot z) = \arg z^2 + \arg z = 2 \cdot \arg z + \arg z = 3 \cdot \arg z.$$

Możemy dowieść indukcyjnie (dowód nie sprawia trudności, więc go pomijamy), że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$|z^n| = |z|^n, \qquad \arg z^n = n \cdot \arg z. \tag{12.3.1}$$

Dzięki tym równościom możemy już zapisać **wzór na n-tą potęgę liczby zespolonej** wykorzystując jej postać trygonometryczną:

$$\Diamond \qquad z^n = \Big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big)^n = r^n(\cos(n \cdot \varphi) + i\sin(n \cdot \varphi)). \qquad \Diamond \tag{12.3.2}$$

Uwaga 12.3.1. Powyższy wzór (12.3.2) nazywamy **wzorem de Moivre'a**. Jest on prawdziwy także dla wykładników ujemnych.

Przykład 12.3.2. Obliczmy $(1+i)^8$. Postać trygonometryczna liczby $1+i$ to

$$\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ),$$

bo mamy $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, zaś $\arg(1+i) = 45^\circ$, bo

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ \end{cases}.$$

Możemy zatem już korzystając z wzoru de Moivre'a wyliczyć potęgę:

$$\begin{aligned}(1+i)^8 &= \sqrt{2}^8 \cdot (\cos(8\cdot 45^\circ) + i\sin(8\cdot 45^\circ)) = \\ &= 16(\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ) = 16(1 + 0\cdot i) = 16.\end{aligned}$$

Uwaga 12.3.3. Używając symbolu $e^{i\varphi}$ wzór de Moivre'a zapisujemy jako

$$z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Wzór de Moivre'a posłuży nam także do znalezienia pierwiastka z liczby zespolonej. Najpierw jednak wprowadźmy jego definicję, gdyż odbiega ona nieco od pojęcia pierwiastka z liczby rzeczywistej.

Definicja 12.3.4. Pierwiastkiem n–tego stopnia z liczby zespolonej w, gdzie $1 < n \in \mathbb{N}$, nazywamy każdą taką liczbę z, że $z^n = w$.

Uwaga 12.3.5. Dana liczba zespolona ma wiecej niż jeden pierwiastek. Przykładowo liczba -4, traktowana jako zespolona, ma dwa pierwiastki drugiego stopnia: $2i$ oraz $-2i$.

Szukając pierwiastka stopnia n z liczby zespolonej $w = R(\cos\psi + i\sin\psi)$ będziemy dążyć do wyznaczenia wszystkich takich liczb $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, że $z^n = w$. Zapiszmy tę równość stosując wzór (12.3.2) i przyjmując postać trygonometryczną liczby w:

$$r^n(\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)) = R(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Ponieważ powyżej zapisane liczby zespolone są równe , zatem ich moduły i argumenty są równe. Porównując więc te wielkości dostajemy równości, z których wyznaczymy nieznane r i φ:

$$r^n = R, \quad \text{stąd} \quad r = \sqrt[n]{R};$$

$$n\cdot\varphi = \psi + 2k\pi, \quad \text{stąd} \quad \varphi = \frac{\psi + 2k\pi}{n}, \quad \text{dla } k \in \mathbb{Z}.$$

Dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ otrzymamy różne wartości argumentów, a co za tym idzie różne pierwiastki n-tego stopnia z w. Dla innych niż podane wartości k, argumenty będą się powtarzać. Poniższy fakt opisuje wszystkie pierwiastki stopnia n.

Fakt 12.3.6. *Niezerowa liczba zespolona $w = R(\cos\psi + i\sin\psi)$ ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n. Dane są one wzorami:*

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[n]{R}\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\psi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\psi}{n}\right)\right),\\
z_1 &= \sqrt[n]{R}\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\psi}{n} + \tfrac{1}{n}\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\psi}{n} + \tfrac{1}{n}\cdot 2\pi\right)\right), ,\\
&\vdots\\
z_{n-1} &= \sqrt[n]{R}\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\psi}{n} + \tfrac{n-1}{n}\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\psi}{n} + \tfrac{n-1}{n}\cdot 2\pi\right)\right).
\end{aligned}$$

Uwaga 12.3.7. Pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej $w = Re^{i\psi}$ zapisują się w postaci:

$$z_k = \sqrt[n]{R}\cdot e^{i\left(\frac{\psi+2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{dla } k\in\{1,\dots,n\}.$$

Wyznaczmy teraz dla konkretnej liczby zespolonej jej pierwiastki.

Przykład 12.3.8. Obliczmy i narysujmy pierwiastki szóstego stopnia z liczby $z = 2i$.
Przedstawmy najpierw tą liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej:

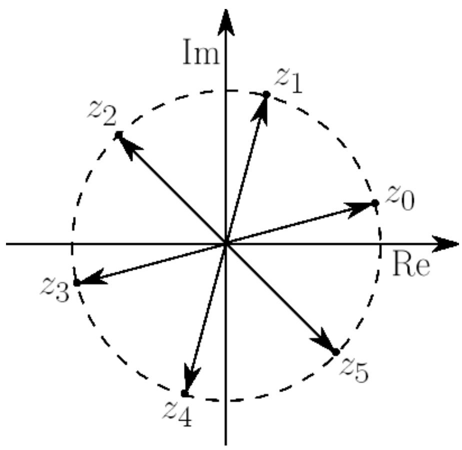
$$|z| = \sqrt{2^2} = 2, \quad \begin{cases}\cos\varphi = \frac{0}{2} = 0\\ \sin\varphi = \frac{2}{2} = 1\end{cases} \Rightarrow \varphi = 90^\circ,$$

$$\text{zatem}\quad z = 2i = 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ).$$

Korzystając z Faktu 12.3.6 wyliczamy pierwiastki:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\tfrac{90^\circ}{6} + i\sin\tfrac{90^\circ}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ),\\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(15^\circ + \tfrac{1}{6}\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(15^\circ + \tfrac{1}{6}\cdot 2\pi\right)\right) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ),\\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(15^\circ + \tfrac{2}{6}\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(15^\circ + \tfrac{2}{6}\cdot 2\pi\right)\right) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ),\\
z_3 &= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(15^\circ + \tfrac{3}{6}\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(15^\circ + \tfrac{3}{6}\cdot 2\pi\right)\right) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 195^\circ + i\sin 195^\circ),\\
z_4 &= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(15^\circ + \tfrac{4}{6}\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(15^\circ + \tfrac{4}{6}\cdot 2\pi\right)\right) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 255^\circ + i\sin 255^\circ),\\
z_5 &= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(15^\circ + \tfrac{5}{6}\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(15^\circ + \tfrac{5}{6}\cdot 2\pi\right)\right) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ).
\end{aligned}$$

Bez trudu możemy także narysować wszystkie pierwiastki w układzie współrzędnych. Zauważmy, że wektory odpowiadające tym pierwiastkom są jednakowej długości (mają równe moduły). Zatem wszystkie pierwiastki leżą na okręgu o promieniu $\sqrt[6]{2}$ i środku w początku układu współrzędnych, w równych kątowych odstępach co $\frac{2\pi}{6}$, czyli 60°, począwszy od kąta biegunowego 15°.



W powyższym przykładzie zauważyliśmy, że pierwiastki z liczby zespolonej układają się w szczególny sposób na płaszczyźnie. Zapiszemy tę obserwację jako ogólną uwagę.

Uwaga 12.3.9. Pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej w znajdują się na okręgu o środku w O i promieniu $\sqrt[n]{|w|}$ w równych odstępach, co kąt $\frac{2\pi}{n}$, zaczynając od punktu $\sqrt[n]{R} \cdot \left(\cos\left(\frac{\psi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\psi}{n}\right)\right)$, którego wektor wodzący ma kąt biegunowy $\frac{\psi}{n}$. Jeśli połączymy wszystkie pierwiastki, to otrzymamy n-kąt foremny wpisany w ten okrąg.

12.4 Zasadnicze twierdzenie algebry

Poszerzenie zbioru liczb rzeczywistych o pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych spowodowało, że otrzymaliśmy dla każdej niezerowej liczby n różnych pierwiastków stopnia n, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ (Fakt 12.3.6). Ponadto okazuje się, że dzięki temu dostajemy także pierwiastki dowolnych równań wielomianowych. Jest to tym bardziej zaskakujące, bowiem w liczbach rzeczywistych nie zawsze istnieją rozwiązania danego równania, np. równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań. Gdy jednak dopuścimy, by rozwiązania równań były liczbami zespolonymi, to dostaniemy dwa pierwiastki: $i, -i$. O istnieniu zespolonych pierwiastków równań wielomianowych mówi nam poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 12.4.1 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każde równanie postaci*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

o współczynnikach $a_n, \ldots, a_0$ zespolonych i niewiadomej x ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Nie będziemy podawać dowodu tego twierdzenia, gdyż wykracza on poza ramy tego skryptu. Jednak dla dwóch szczególnych przypadków pokażemy, że twierdzenie jest prawdziwe.

1. Równania postaci $\underline{x^n - w = 0}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, a w jest liczbą zespoloną.
   Takie równania rzeczywiście mają pierwiastek zespolony, a dokładniej jest ich n, gdyż są to pierwiastki stopnia n z liczby w (patrz Fakt 12.3.6).

2. Równania postaci $\underline{ax^2 + bx + c = 0}$, gdzie a, b, c są zespolonymi współczynnikami.
   Równanie kwadratowe rozwiązujemy tak, jak dla współczynników rzeczywistych. $\Delta = b^2 - 4ac$ jest liczbą zespoloną, która ma dwa pierwiastki drugiego stopnia, oznaczmy je przez p_1, p_2. Zatem istnieją dwa pierwiastki równania kwadratowego, które są liczbami zespolonymi postaci $x_1 = \frac{-b+p_1}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+p_2}{2a}$.

Przykład 12.4.2. Znajdźmy zespolone pierwiastki równania $x^2 - 2x + 5 = 0$. Obliczamy kolejno:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 5 = -16,$$

zatem pierwiastkami drugiego stopnia z Δ są liczby zespolone $4i$ oraz $-4i$. Stąd szukane pierwiastki tego równania są następujące:

$$x_1 = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i, \qquad x_2 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i.$$

Oprócz równań tych szczególnych wymienionych wyżej postaci, potrafimy także wyznaczać rozwiązania równań także niektórych innych postaci. Zobaczmy na przykłady poniżej.

Ćwiczenie 12.4.3. Znajdź pierwiastki równania $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$.
ROZWIĄZANIE:
Sprowadzimy to równanie czwartego stopnia do równania kwadratowego przez podstawienie za z^2 liczby zespolonej w. Mamy wtedy

$$w^2 + 3w + 2 = 0,$$
$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1,$$
$$w_1 = \tfrac{-3-1}{2} = -2, \qquad w_2 = \tfrac{-3+1}{2} = -1.$$

Podstawmy teraz z powrotem:

$$\begin{array}{cc} z^2 = w_1 & z^2 = w_2 \\ z^2 = -2 & z^2 = -1 \\ z_1 = \sqrt{2}i, \quad z_2 = -\sqrt{2}i, & z_3 = i, \quad z_4 = -i. \end{array}$$

Otrzymaliśmy zatem cztery pierwiastki zespolone tego równania.

Rozwiążmy jeszcze jedno równanie, tym razem trzeciego stopnia.

Przykład 12.4.4. Rozwiąż równanie $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$.
ROZWIĄZANIE:
Zauważmy, że równanie to można przekształcić do postaci:

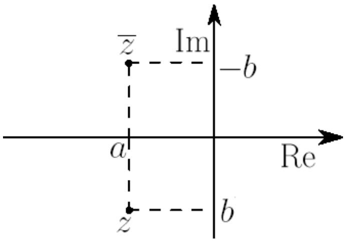
$$z^2(z-2) + 4(z-2) = 0,$$
$$(z-2)(z^2+4) = 0.$$

Widzimy zatem, że liczba 2 jest jednym z pierwiastków tego równania. Kolejne wyznaczymy z równania $z^2 + 4 = 0$. To natomiast nie sprawia problemu. Ostatecznie pierwiastkami równania $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$ są liczby: $2,\ 2i,\ -2i$.

12.5 Sprzężenie liczby zespolonej

W tym podrozdziale omówimy pewną operację na liczbach zespolonych a także jej własności. **Sprzężeniem** będziemy nazywać przyporządkowanie liczbie zespolonej $z = a + bi$ liczby $\overline{z} = a - bi$. Liczbę $\overline{z}$ nazywamy **sprzężeniem liczby** z (**liczbą sprzężoną do** z lub z **sprzężone**).

Przykład 12.5.1. Sprzężeniem liczby zespolonej $3-7i$ jest liczba $\overline{3-7i}=3+7i$.



Z rysunku obok widać, że liczby z i z sprzężone są położone symetrycznie względem osi rzeczywistej.

Fakt 12.5.2. *Sprzężenie posiada następujące własności:*

(a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;

(b) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$;

(c) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

(d) $\overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$;

(e) $\overline{\overline{z}}=z$;

(f) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

Dowód. Pokażemy tylko ostatnią równość, ponieważ wszystkie pozostałe można równie łatwo udowodnić.

Niech $z=a+bi$, zatem $\overline{z}=a-bi$. Wtedy rzeczywiście zachodzi (f):

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2-abi+abi=a^2+b^2=|z|^2.$$

□

Przećwiczmy poznane własności sprzężenia wykorzystując je w poniższych obliczeniach.

Przykład 12.5.3. Obliczmy:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{(3+4i)}(-2+3i)}&=\overline{\overline{(3+4i)}}\cdot\overline{(-2+3i)}\\&=(3+4i)(-2-3i)=-6+12-9i-8i=6-17i.\end{aligned}$$

12.6 Funkcje zespolone

Wiemy, że liczby zespolone możemy utożsamiać z punktami na płaszczyźnie. Zbiór wszystkich liczb zespolonych stanowi całą płaszczyznę, zwaną **płaszczyzną zespoloną** i oznaczmy go przez $\mathbb{C}$. W tym zbiorze możemy także określać funkcje, zwane zespolonymi.

Definicja 12.6.1. Funkcję $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, której argumenty i wartości są liczbami zespolonymi, nazywamy **funkcją zespoloną**.

Przykład 12.6.2. Funkcjami zespolonymi są np. $f(z) = z^3 - z$, $g(z) = z + 3 - i$.

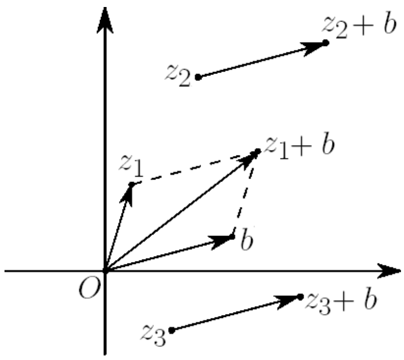
Okazuje się, że funkcje zespolone opisują pewne przekształcenia płaszczyzny. Możemy je w ten sposób traktować ponieważ przeprowadzają punkty płaszczyzny zespolonej (reprezentujące liczby zespolone) na punkty tej samej płaszczyzny. Zdefiniujemy teraz pewne szczególne funkcje i na kilku przykładach spróbujemy określić jakimi są one przekształceniami.

Definicja 12.6.3. Zespoloną funkcją liniową nazywamy funkcję $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, która ma postać $f(z) = az+b$, gdzie a i b są pewnymi zespolonymi współczynnikami.

Zbadamy kilka konkretnych zespolonych funkcji liniowych.

Przykład 12.6.4. Rozważmy funkcję $f(z) = z + b$.

Narysujmy w układzie współrzędnych wartości funkcji f dla kilku liczb zespolonych (punktów). Obraz danego punktu z powstaje przez dodanie wektora wodzącego punktu b do wektora wodzącego z. Przekształcenie, jakie tu obserwujemy, to przesunięcie o wektor odpowiadający liczbie zespolonej b.

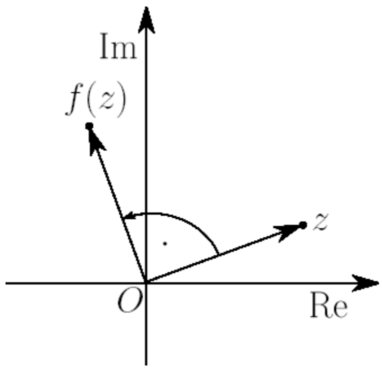


Przykład 12.6.5. Niech $f(z) = iz$.
Zbadajmy wartość funkcji f dla liczby zespolonej z.
Z Wniosku 12.2.10 mamy, że

$$|f(z)| = |i \cdot z| = |i| \cdot |z| = |z|,$$

$$\arg f(z) = \arg(i \cdot z) = \arg i + \arg z = \frac{\pi}{2} + \arg z,$$

ponieważ $\arg i = \frac{\pi}{2}$, bo $i = 0 + 1 \cdot i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Widzimy więc, że wektor wodzący reprezentujący liczbę $f(z)$ ma taką samą długość jak wektor reprezentujący liczbę z oraz kąt biegunowy większy o $\frac{\pi}{2}$. Stąd możemy już wywnioskować, że f jest obrotem wokół O o kąt $\frac{\pi}{2}$.



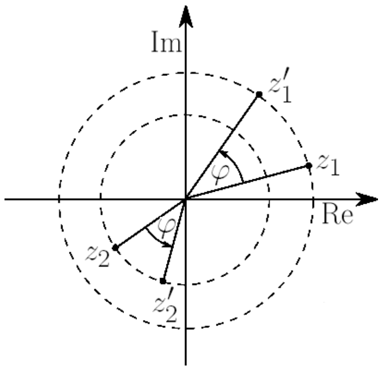
Powyższy przykład był szczególnym przypadkiem liniowej funkcji zespolonej, o której będzie mowa w następnym przykładzie.

Przykład 12.6.6. Zbadajmy jakimi przekształceniami płaszczyzny są funkcje dane wzorem $f(z) = a \cdot z$, gdzie $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$, tzn. $|a| = 1, \arg a = \varphi$.

Tak jak w Przykładzie 12.6.5 korzystamy z wniosku dotyczącego modułu i argumentu iloczynu liczb zespolonych. Mamy zatem:

$$|f(z)| = |a \cdot z| = |a| \cdot |z| = 1 \cdot |z| = |z|,$$

$$\arg(a \cdot z) = \arg a + \arg z = \varphi + \arg z.$$



Zauważmy, że moduł obrazu punktu z nie zmienił się, a argument zwiększył sie o kąt φ. Zatem funkcja $f(z) = a \cdot z$ dla $|a| = 1, \arg a = \varphi$ jest obrotem o kąt φ wokół punktu O.
Na rysunku zaznaczone są punkty z_1, z_2 a także ich obrazy przez funkcję f odpowiednio $f(z_1) = z_1'$ i $f(z_2) = z_2'$.

W poprzednich trzech przykładach określaliśmy jakimi przekształceniami są dane funkcje zespolone liniowe na podstawie geometrycznej interpretacji. Teraz natomiast zobaczmy w jaki sposób algebraicznie można rozwiązywać podobne zadania.

Przykład 12.6.7. Zbadajmy, jakim przekształceniem jest funkcja $f(z) = 3z + i$. Ustalmy pewną liczbę zespoloną $z = x + yi$. Niech obrazem tej liczby przez f będzie $f(z) = z' = x' + y'i$. Wstawmy do wzoru funkcji te oznaczenia:

$$x' + y'i = 3(x + yi) + i \;\Leftrightarrow\; x' + y'i = 3x + (3y + 1)i.$$

W otrzymanej równości porównujemy części rzeczywiste i urojone liczb zespolonych występujących po obu stronach. Mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y + 1 \end{cases}.$$

Jest to wzór przekształcenia odpowiadający funkcji $f(z) = 3z + i$. Jest nim złożenie jednokładności o środku w punkcie O i skali 3 oraz translacji o wektor $[0, 1]$.

Wszystkie przekształcenia, które otrzymaliśmy w tych czterech przykładach są przekształceniami afinicznymi. Pokażemy teraz, że dowolne inne liniowe funkcje zespolone są przekształceniami afinicznymi.

Mamy daną funkcję zespoloną $f(z) = az + b$. Niech $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$, zaś $z' = x' + y'i$ niech będzie wartością funkcji f dla liczby zespolonej $z = x + yi$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} z' &= x' + y'i = f(z) = az + b = (a_1 + a_2 i)(x + yi) + (b_1 + b_2 i) = \\ &= a_1 x - a_2 y + a_1 yi + a_2 xi + b_1 + b_2 i = \\ &= (a_1 x - a_2 y + b_1) + (a_2 x + a_1 y + b)i. \end{aligned}$$

Zatem porównując części rzeczywiste i urojone otrzymujemy wzór przekształcenia, którym jest liniowa funkcja zespolona:

$$\lozenge \qquad \begin{cases} x' = a_1x - a_2y + b_1 \\ y' = a_2x + a_1y + b \end{cases} . \qquad \lozenge \tag{12.6.1}$$

Na podstawie wyprowadzonego wzoru możemy wyciągnąć następujące wnioski.

Wniosek 12.6.8.

1. Każda zespolona funkcja liniowa jest przekształceniem afinicznym płaszczyzny.
2. Macierz M części liniowej przekształcenia danego wzorem (12.6.1), a dokładniej jej wyznacznik, niesie za sobą dużo informacji. Mamy bowiem, że

$$\det M = \det \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 = |a|^2.$$

   Z faktów zawartych w podrozdziale 8.2 wnioskujemy, że przekształcenie f jest odwracalne, jeśli $a \neq 0$, (bo wtedy $\det M \neq 0$). Ponadto, gdy $a \neq 0$, to przekształcenie f:

   - zachowuje orientacje płaszczyzny, (bo $\det M > 0$);
   - zmienia pola figur w stosunku $|a|^2$.

3. Badając obrazy $[a_1, a_2]$ i $[-a_2, a_1]$ wersorów przez część liniową przekształcenia f przekonujemy się, że f jest podobieństwem o skali $|a|$. Wystarczy bowiem zgodnie z Definicją 8.6.1, by były one równej długości i do siebie prostopadłe (czyli ich iloczyn skalarny równy zero). Dla obrazów wersorów zachodzą te dwa warunki:

$$|[a_1, a_2]| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |a| = |[-a_2, a_1]|,$$

$$[a_1, a_2] \circ [-a_2, a_1] = a_1 \cdot (-a_2) + a_2 \cdot a_1 = 0.$$

12.6.9. Funkcje antyzespolone liniowe

Funkcje, które są złożeniem funkcji liniowych zespolonych ze sprzężeniem nazywamy **funkcjami antyzespolonymi liniowymi**. Wyrażają się one wzorem

$$f(z) = \overline{az + b} \quad \text{lub} \quad f(z) = a\overline{z} + b.$$

Funkcje antyzespolone liniowe podobnie jak zespolone liniowe są pewnymi przekształceniami płaszczyzny. Przykładem takich funkcji jest sprzężenie. W podrozdziale 12.5 mówilimy, że sprzężeniu liczby zespolonej odpowiada przekształcenie punktu płaszczyzny przez symetrię względem osi rzeczywistej. Sprawdźmy, że jest tak faktycznie.

Przykład 12.6.10. Niech $f(z) = \overline{z}$. Sprawdźmy jakim przekształceniem jest ta funkcja. Mamy, że

$$x' + y'i = f(z) = f(x+iy) = x - yi, \quad \text{a stąd} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}.$$

Zatem przekształcenie f wyrażone powyższym wzorem jest symetrią względem osi rzeczywistej Re.

Fakt 12.6.11. *Każda liniowa funkcja antyzespolona $f(z) = a\overline{z} + b$ jest podobieństwem o skali $|a|$, zmieniającym orientację płaszczyzny.*

Dowód tego faktu przebiega analogicznie do uzasadnienia Wniosku 12.6.8, więc go pomijamy. Czytelnik może przeprowadzić go sam, jako ćwiczenie. Treść Faktu 12.6.11 ilustrujemy natomiast konkretnym przykładem.

Przykład 12.6.12. Zbadajmy jakim przekształceniem jest funkcja $f(z) = i\overline{z}$. Niech $z = x + yi$, a $f(z) = z' = x' + y'i$. Zapiszemy wtedy, że

$$x' + y'i = f(z) = i(\overline{x+yi}) = i(x - yi) = y + xi.$$

Stąd porównując części rzeczywiste i urojone dostajemy wzór przekształcenia:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}.$$

Tym przekształceniem jest odbicie względem prostej $y = x$. Przekonajmy się, że zmienia ono orientację płaszczyzny, badając wyznacznik macierzy tego przekształcenia:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

Ponadto jest to izometria, ponieważ wersory przechodzą na wektory jednostkowe i prostopadłe (wersor $[1,0]$ przechodzi na wersor $[0,1]$ i odwrotnie). Izometria natomiast jest podobieństwem o skali 1. Mamy zatem zgodność z Faktem 12.6.11, bo współczynnik a dla tej funkcji antyzespolonej jest równy i, zaś $|i| = 1$.

Bibliografia

[1] S.Białas, A.Ćmiel, A.Fitzke, *Matematyka dla studiów inżynierskich, cz.I algebra i geometria*, WAGH, Kraków 2000.

[2] A.Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa 1976.

[3] B.Gdowski, E.Pluciński, *Zadania z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej*, PWN, Warszawa 1974.

[4] T.Jurlewicz, Z.Skoczylas, *Algebra liniowa 1 Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 1998.

[5] T.Jurlewicz, Z.Skoczylas, *Algebra liniowa 1 Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 1998.

[6] F.Leja, *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa 1969.

[7] E.Piegat, *Wektory i geometria*, PZWS, Warszawa 1964.

[8] W.Więsław, *Liczby i geometria*, WSiP, Warszawa 1996.