

Centrum Badań Nieliniowych im. J. Schaudera  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Warsztaty  
z Równań Różniczkowych Częstkowych

Toruń, 12–22 listopada 2002 r.

Pod redakcją naukową  
Prof. dr hab. Piotra Bilera

Toruń, 2003

ISBN 83-231-1422

Centrum Badań Nieliniowych im. Juliusza SCHAUDERA  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika  
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń

Redakcja: tel. +48 (56) 611 34 28, faks: +48 (56) 622 89 79

e-mail: [tmna@ncu.pl](mailto:tmna@ncu.pl)  
<http://www.cbn.ncu.pl>

Skład komputerowy w  $\text{\TeX}$ -u: Jolanta Szelatyńska

Wydanie pierwsze. Nakład 250 egz.

Druk  
Zakład Pracy Chronionej  
Drukarnia „Gerges”  
ul. Kalinowa 25, 87-100 Toruń

## SPIS TREŚCI

1. Przedmowa	5
2. P. BILER, <i>Równania falowe</i>	7
3. G. KARCH, <i>Równanie ciepła</i>	31
4. T. NADZIEJA, <i>Równanie Poissona</i>	67
5. D. WRZOSEK, <i>Zagadnienia ewolucyjne</i>	101
6. Podziękowania	137
7. Indeks	139



## PRZEDMOWA

„Warsztaty z równań różniczkowych cząstkowych” odbyły się w Centrum Badań Nieliniowych im. J. Schaudera (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu) w dniach 12–22 listopada 2002 roku. Inicjatywa spotkania się młodych matematyków z całej Polski interesujących się równaniami różniczkowymi cząstkowymi i pragnących ugruntować znajomość podstaw teorii wyszła od kierownika Centrum Profesora Lecha Górniewicza wiosną 2002 roku.

Duże zainteresowanie „Warsztatami” przyjemnie zaskoczyło organizatorów i wykładowców. Sale, w których odbywały się zajęcia były pełne aktywnych słuchaczy (około 50 osób).

W programie znalazły się cykle wykładów z równań eliptycznych (Tadeusza Nadziei z Uniwersytetu Zielonogórskiego), z równań parabolicznych (Grzegorza Karcha z Uniwersytetu Wrocławskiego), z zagadnień ewolucyjnych (Dariusza Wrzoska z Uniwersytetu Warszawskiego) i z równań falowych (niżej podpisanego). Oprócz wykładów odbywały się konsultacje i nieformalne seminaria, w których brali udział wykładowcy i ich współpracownik naukowy Philippe Laurençot z Université Paul Sabatier z Tuluzy.

W niniejszym tomie znajdują się notatki, które wykładowcy przygotowali do zajęć. Ostateczny ich kształt (zachowujący styl wykładów) wiele zawdzięcza celnym uwagom słuchaczy i współpracowników, a szczególnie Profesora Andrzeja Krzywickiego.

Rzecz jasna, wybór zagadnień poruszanych w trakcie wykładów toruńskich pozostaje kwestią indywidualnych preferencji autorów, niemniej jednak mamy nadzieję, że główne części tych notatek tworzą pewien kanon współczesnej uniwersyteckiej wiedzy o równaniach różniczkowych cząstkowych, a tematy potraktowane w sposób bardziej fakultatywny pokazują wybrane aktualne kierunki rozwoju teorii.

Traktując poniższy skrypt jako wstępną wersję pewnej większej całości, będziemy wdzięczni Czytelnikom za wszelkie uwagi krytyczne.

W imieniu autorów

*Piotr Biler*



## RÓWNANIA FALOWE

PIOTR BILER

### Spis treści

1. Wyprowadzenie równania struny; wzory d'Alemberta.
2. Metody energetyczne.
3. Zagadnienie Cauchy'ego w 2 ( $2k$ ) i 3 ( $2k + 1$ ) wymiarach.
4. Zasada Huygensa.
5. Zagadnienie niejednorodne – wzór Duhamela.
6. Metoda Fouriera dla zagadnień brzegowych.
7. Zagadnienie na wartości własne dla laplasjanu.
8. Tłumione równanie falowe.
9. Słabe rozwiązania.
10. Uwagi o zagadnieniu Cauchy'ego dla innych równań.
11. Nieliniowe równania falowe i inne uwagi.
12. Zadania.

### 1. Wyprowadzenie równania struny; wzory d'Alemberta

Rozważamy drgania poprzeczne (w płaszczyźnie  $(x, y)$ ) nieskończonej struny opisane funkcją  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Zakładamy, że wychylenia części struny są tak małe, że napięcie struny w każdym jej punkcie jest stałe:  $T = \text{const}$ . Oznaczmy przez  $\rho > 0$  (stałą) gęstość liniową struny. Przyjmując, że struna jest doskonale wiotka, czyli że  $T$  działa w kierunku stycznym do struny, otrzymujemy z równania Newtona bilans sił:

$$\rho \Delta x u_{tt} = T(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)).$$

Dzieląc obustronnie przez  $\Delta x$  i przechodząc do granicy  $\Delta x \rightarrow 0$ , dostajemy zatem

$$\rho u_{tt} = T u_{xx}, \quad \text{czyli} \quad u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

gdzie  $c^2 = T/\rho$  określa (jak wkrótce zobaczymy) prędkość rozchodzenia się zaburzeń. Warto porównać ten ogromnie uproszczony model z wyprowadzeniem uwzględniającym subtelniejsze zjawiska fizyczne w [13]. W dalszym ciągu często przyjmować będziemy  $c = 1$ , co nie powoduje straty ogólności (wystarczy zamienić czas przechodząc od  $t$  do  $ct$ ), rozpatrując równanie w postaci

$$(1.1) \quad u_{tt} = u_{xx}.$$

Wielowymiarowym analogonem równania struny jest równanie falowe

$$(1.2) \quad u_{tt} = \Delta u,$$

gdzie  $\Delta$  jest operatorem Laplace'a w  $\mathbb{R}^N$ :  $\Delta = \sum_{k=1}^N \partial^2/\partial x_k^2$ . Opisuje ono np. drgania cienkich membran ( $N = 2$ ) i drgania (akustyczne, elektromagnetyczne) jednorodnych ośrodków ciągłych w trzech wymiarach ( $N = 3$ ).

Wprowadzenie nowych zmiennych  $\xi = x - t$  i  $\eta = x + t$  w (1.1) prowadzi do prostego równania

$$(1.3) \quad u_{\xi\eta} = 0,$$

gdzie przez (tę samą literę  $u$ )  $u(\xi, \eta) = u(x, t)$  oznaczamy (nową) funkcję  $u$  w nowych zmiennych. Natychmiast otrzymujemy stąd przez całkowanie

$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta),$$

czyli po prostu

$$(1.4) \quad u(x, t) = \phi(x - t) + \psi(x + t)$$

z dowolnymi (odpowiednio regularnymi, np.  $C^2$ ) funkcjami  $\phi, \psi$ . Jak widać, proste o równaniach  $x - t = \text{const}$  i  $x + t = \text{const}$  są poziomiami pierwszego i drugiego, odpowiednio, składnika we wzorze d'Alemberta (1.4). Są one *charakterystykami*, wzdłuż których przenoszą się te same wartości funkcji  $\phi$  i  $\psi$  odpowiednio, por. uwagi w Rozdziale 10.

**Definicja 1.1.** *Zagadnieniem Cauchy'ego* dla równania (nieskończonej, niezamocowanej) struny (1.1) nazywamy problem znalezienia funkcji

$$u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

takiej, że

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \end{aligned}$$

z zadanymi funkcjami (*danymi początkowymi*)  $f, g$ .



Proste całkowania prowadzą do następującej, konkretnej wersji wzoru d'Alemberta (1.4)

$$(1.6) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ f(x-t) + f(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds \right\}.$$

Z tego wzoru widać, że zachodzi

**Twierdzenie 1.2.** *Jeżeli  $f \in C^2$  i  $g \in C^1$ , to  $u$  zadane wzorem (1.6) jest klasycznym ( $u \in C^2$ ) rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (1.5).*

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie  $u$  w punkcie  $(x_0, t_0)$  zależy od wartości danych początkowych  $f$  i  $g$  na odcinku  $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ . *Obszarem wpływu* nazywamy stożek charakterystyczny przeszłości z wierzchołkiem w punkcie  $(x_0, t_0)$ , tzn. zbiór

$$\{(x, t) : t \leq t_0, |x - x_0| \leq |t - t_0|\}.$$

Podobnie, *obszarem zależności* nazywamy stożek charakterystyczny przyszłości, tzn.  $\{(x, t) : t \geq t_0, |x - x_0| \leq |t - t_0|\}$ .

Ponadto, rozwiązanie zagadnienia (1.5) zależy w sposób ciągły od danych początkowych:

$$\|u - \tilde{u}\|_\infty \equiv \sup_{x, 0 \leq t \leq T} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq C(T)(\|f - \tilde{f}\|_\infty + \|g - \tilde{g}\|_\infty)$$

dla pewnej ciągłej funkcji  $C = C(T)$ . Oszacowanie to można zlokalizować, pisząc normy supremum danych początkowych na sumie mnogościowej obszarów wpływu zbioru punktów, w których badana jest funkcja  $u$ .

## 2. Metody energetyczne

W badaniu charakteru zależności rozwiązań od wartości danych początkowych (nie tylko dla rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego ale również dla rozwiązań określonych tylko lokalnie) istotną rolę gra metoda energetyczna, w której bada się pewne funkcjonały całkowite od rozwiązań i ich pochodnych. Idea tej metody znajduje swoje rozwinięcie w teorii słabych rozwiązań równań hiperbolicznych wspomnianych w Rozdziale 9.

Rozważmy dwa zagadnienia Cauchy'ego dla niejednorodnego równania falowego

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + F(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} &= \Delta \tilde{u} + \tilde{F}(x, t), \\ \tilde{u}(x, 0) &= \tilde{f}(x), \quad \tilde{u}_t(x, 0) = \tilde{g}(x), \end{aligned}$$

gdzie  $F$  i  $\tilde{F}$  można interpretować jako siły zewnętrzne.

**Twierdzenie 2.1.** *Załóżmy, że  $F = \tilde{F}$  w stożku charakterystycznym przeszłości  $C = \{(x, t) : |x - x_0| \leq t_0 - t\}$ , oraz  $f = \tilde{f}$  i  $g = \tilde{g}$  dla  $\{x : |x - x_0| \leq t_0\}$ . Wówczas rozwiązania klasyczne  $u$  i  $\tilde{u}$  pokrywają się we wszystkich punktach stożka  $C$ .*

*Dowód.* Funkcja  $w = u - \tilde{u}$  spełnia jednorodne równanie falowe (1.2) wewnątrz stożka  $C$ . Przy tym  $w(x, 0) = 0$  i  $w_t(x, 0) = 0$  dla wszystkich  $|x - x_0| \leq t_0$ . Oznaczając przez  $B_t$  przekrój stożka  $C$  na poziomie  $t$ :  $B_t = \{(x, t) : |x - x_0| \leq t_0 - t\}$ , określamy funkcjonal energii w chwili  $t$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{B_t} |\nabla w|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{B_t} (|w_t|^2 + |\nabla_x w|^2) dx.$$

Pierwszy składnik w powyższym funkcjale ma interpretację energii kinetycznej, a drugi – potencjalnej. Rozważając iloraz różnicowy  $E$  dla  $t + h$  i  $t$  otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} = \int_{B_t} \left( w_t w_{tt} + \sum_{k=1}^N w_{x_k} w_{x_k t} \right) - \frac{1}{2} \int_{\partial B_t} (|w_t|^2 + |\nabla_x w|^2) dS(x),$$

a następnie, z twierdzenia o dywergencji,

$$\int_{B_t} \left( w_t w_{tt} + \sum_{k=1}^N w_{x_k} w_{x_k t} \right) = \int_{B_t} w_t \left( w_{tt} - \sum_{k=1}^N w_{x_k x_k} \right) + \int_{\partial B_t} \sum w_t w_{x_k} \bar{n}_k dS(x)$$

( $\bar{n} = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_N)$  jest jednostkowym wektorem normalnym do brzegu  $\partial B_t$ ), ponieważ  $w_{x_k} w_{x_k t} = (w_{x_k} w_t)_{x_k} - w_t w_{x_k x_k}$ . Teraz nierówność Cauchy'ego-Schwarza prowadzi do

$$\sum w_t w_{x_k} \bar{n}_k \leq |w_t| \left( \sum w_{x_k}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \left( |w_t|^2 + \sum |w_{x_k}|^2 \right) = \frac{1}{2} |\nabla w|^2,$$

a następnie do nierówności różniczkowej

$$\frac{dE}{dt} = \int_{B_t} \left( \sum w_t w_{x_k} \bar{n}_k - \frac{1}{2} |\nabla w|^2 \right) dS(x) \leq 0.$$

Ponieważ  $E(0) = 0$  i  $E \geq 0$ , otrzymujemy stąd  $E \equiv 0$ , czyli  $|\nabla w| = 0$  prawie wszędzie w  $C$  i (uwzględniając  $w(x, 0) = 0$ ) w konsekwencji mamy  $w(x, t) = 0$  w całym stożku  $C$ .  $\square$

Podobnie wprowadza się energię dla rozwiązań równań Maxwella, patrz Zadanie 12.11. Konsekwencją równań Maxwella są równania falowe spełniane przez każdą składową pól elektrycznego  $E$  i magnetycznego  $B$ .

Dyskusję funkcjonałów, które są stałe w czasie wzdłuż rozwiązań równania falowego, można prowadzić w przypadku nieliniowego równania falowego

$$(2.1) \quad u_{tt} - \Delta u + F'(u) = 0,$$

gdzie funkcja  $F$  spełnia stosowne warunki regularności i wzrostu, por. [15]. Otóż równanie (2.1) jest warunkiem stacjonarnego działania (tzn. równaniem Eulera–Lagrange’a, por. też [7]) dla lagrangianu

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) - \frac{1}{2}u_t^2.$$

W związku z tym, na mocy twierdzenia Noether, symetrie lagrangianu prowadzą do praw zachowania dla równania (2.1).

I tak, *energia*

$$E = \int \left( \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \right)$$

związana jest z niezmienniczością  $\mathcal{L}$  (a więc i rozwiązań  $u$ ) na przesunięcia w czasie; dlatego  $(d/dt)E = 0$ .

Niezmienniczość lagrangianu na translacje w przestrzeni implikuje zachowanie *momentów*:

$$\frac{d}{dt} \int u_t \nabla u = 0,$$

a zatem dla  $N = 1$  (po wykorzystaniu stałości energii  $E$ ):

$$\frac{d}{dt} \int |u_t \pm u_x|^2 = 0.$$

Ma to rzecz jasna związek z ekwipartycją energii, patrz Zadanie 12.5.

Niezmienniczość równania (2.1) na skalowanie  $u \mapsto \lambda^{(N-1)/2}u(\lambda x, \lambda t)$  prowadzi do tożsamości całkowej:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left( \frac{t}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + u_t x \cdot \nabla u + tF(u) + \frac{N-1}{2}uu_t \right) \\ = \int \left( -\frac{N-1}{2}uF'(u) + (N+1)F(u) \right). \end{aligned}$$

Stąd, jeżeli  $F(u) = C|u|^{2(N+1)/(N-1)}$ , to prawa strona jest zerem, i otrzymujemy niezmiennik równania (2.1).

Niezmienniczość konforemna:  $\mathcal{L}$  jest niezmienniczy na przekształcenia

$$(x, t) \mapsto \frac{(x, t)}{|x|^2 - t^2} \equiv (x', t').$$

Następnie skalujemy  $u \mapsto ||x'|^2 - t'^2|^{(N-1)/2}u(x', t')$ . W konsekwencji, przekształcenia Lorentza we współrzędnych  $(x', t')$  generują zachowanie konforemnej energii, momentów itp.:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left( (t^2 + |x|^2) \left( \frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2) + F(u) \right) + 2tx \cdot \nabla u u_t \right. \\ \left. + t(N-1)uu_t - \frac{N-1}{2}u^2 \right) = -t \int ((N-1)uF'(u) - 2(N+1)F(u)); \end{aligned}$$

wyrażenie po prawej stronie znika przy założeniu postaci  $F$  jak wyżej.

### 3. Zagadnienie Cauchy'ego w 2 ( $2k$ ) i 3 ( $2k + 1$ ) wymiarach

W tej części zajmiemy się zagadnieniem Cauchy'ego dla wielowymiarowego równania falowego

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \end{aligned}$$

dla funkcji  $u: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ , z zadanymi dla  $t = 0$  funkcjami (*danymi początkowymi*)  $f, g$ , por. np. [3], [5], [9].

**Twierdzenie 3.1.** *Jeżeli  $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$  i  $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ , to  $u$  dane wzorem Kirchhoffa*

$$(3.2) \quad u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{S(0,1)} f(x + ty) d\sigma(y) \right) + t \int_{S(0,1)} g(x + ty) d\sigma(y) \right]$$

jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia Cauchy'ego (3.1) dla  $N = 3$ .  $S(0, 1)$  oznacza sferę jednostkową o środku w 0 w  $\mathbb{R}^3$ .

*Dowód.* Wystarczy użyć twierdzenia o dywergencji.  $\square$

Analogiczny wynik dla równania falowego w dwóch wymiarach jest znany jako

**Twierdzenie 3.2.** *Jeżeli  $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$  i  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , to  $u$  dane wzorem Poissona*

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{B(0,1)} f(x + ty)(1 - |y|^2)^{-1/2} dy \right) \right. \\ &\quad \left. + t \int_{B(0,1)} g(x + ty)(1 - |y|^2)^{-1/2} dy \right] \end{aligned}$$

jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia Cauchy'ego (3.1) dla  $N = 2$ .  $B(0, 1)$  jest kołem jednostkowym o środku w 0 na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ .

*Dowód.* Wzór Poissona wynika łatwo ze wzoru Kirchhoffa po zastosowaniu metody zstępowania. Zauważmy, że jeżeli ogólniej:  $u$  jest rozwiązaniem równania falowego w  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ , które nie zależy od  $x_N$ , to  $u$  jest również rozwiązaniem równania falowego w  $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ . Kluczowe dla dowodu jest spostrzeżenie, że  $dy = (1 - |y|^2)^{1/2} d\sigma(y, y_N)$  i, że całkowanie w (3.2) przebiega po dwóch półsferach  $|y|^2 + y_N^2 = 1$ ,  $y_N > 0$  i  $y_N < 0$ ,  $y = (y_1, \dots, y_{N-1})$ .  $\square$

**Uwaga.** Ze wzoru Poissona można metodą zstępowania wyprowadzić również wzór (1.6). Natomiast w Zadaniu 12.8 proponuje się wykazać własność średnich sferycznych dla funkcji harmonicznych używając do tego wzoru Kirchhoffa (3.2).

Założenia regularności w Twierdzeniu Poissona 3.2 można nieco osłabić, patrz Zadanie 12.10.

Podobnie, jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  są radialnie symetryczne, założenia o ich regularności potrzebne do istnienia klasycznego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego można istotnie osłabić.

Twierdzenia 3.1 i 3.2 mają wielowymiarowe uogólnienia, których autorem jest włoski matematyk Tedone. Dowodzi się ich z pomocą transformaty Fouriera (por. [5], [9]) lub metodą średnich sferycznych.

**Twierdzenie 3.3.** *Jeżeli wymiar  $N$  jest liczbą nieparzystą,*

$$f \in C^{(N+3)/2}(\mathbb{R}^N) \quad i \quad g \in C^{(N+1)/2}(\mathbb{R}^N),$$

to  $u$  dane wzorem

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (N-2) \sigma_N} \\ & \times \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(N-3)/2} \left( t^{N-2} \int_{S(0,1)} f(x+ty) d\sigma(y) \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(N-3)/2} \left( t^{N-2} \int_{S(0,1)} g(x+ty) d\sigma(y) \right) \right] \end{aligned}$$

jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia Cauchy'ego (3.1).

*Dowód.* Definiujemy dla ciągłej funkcji  $\phi$  zmiennej  $x \in \mathbb{R}^N$  i  $r > 0$  średnie sferyczne wzorem

$$M_\phi(x, r) = \frac{1}{\sigma_N} \int_{S(0,1)} \phi(x+ry) d\sigma(y).$$

Rozszerzamy tę definicję dla  $r \in \mathbb{R}$  kładąc dla  $r \leq 0$

$$M_\phi(x, 0) = \phi(x), \quad M_\phi(x, r) = M_\phi(x, -r).$$

W ten sposób otrzymujemy dla każdego ustalonego  $x$  funkcję  $M_\phi(x, \cdot)$  ciągłą na  $\mathbb{R}$ , a dla bardziej regularnych funkcji  $\phi$  ( $\phi \in C^k$ ) odpowiednio gładzsze średnie  $M_\phi$  ( $M_\phi \in C^k$ ). Dla funkcji  $\phi$  określonych na  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \ni (x, t)$  rozważamy średnie  $M_\phi(x, r; t)$  traktując  $t$  jako parametr (nie całkujemy względem tej zmiennej).

Zauważmy, że jeżeli  $u = u(x, t)$  spełnia równanie falowe  $u_{tt} = \Delta u$ , to rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} M_u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u$$

jest  $M_u(x, r; t)$ . Wynika to z następujących obliczeń:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} M_u(x, r; t) &= \frac{1}{\sigma_N} \frac{\partial}{\partial r} \int_{S(0,1)} u(x+ry, t) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\sigma_N} \int_{S(0,1)} \sum_{k=1}^N y_k \frac{\partial}{\partial y_k} u(x+ry, t) d\sigma(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma_N} \int_{S(0,1)} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} u(x + ry, t) d\sigma(y) = \frac{1}{\sigma_N} \int_{B(0,1)} r \Delta u(x + ry, t) dy \\
&= \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y, t) dy \\
&= \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_0^r \int_{S(x,\rho)} u_{tt}(y, t) d\sigma(y) d\rho.
\end{aligned}$$

Następnie mnożymy tę tożsamość przez  $r^{N-1}$  i różniczkujemy względem  $r$  dochodząc do:

$$\begin{aligned}
(N-1)r^{N-2} \frac{\partial}{\partial r} M_u + r^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u &= \frac{1}{\sigma_N} \int_{S(x,r)} u_{tt}(y, t) d\sigma(y) \\
&= \frac{r^{N-1}}{\sigma_N} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{S(0,1)} u(x + ry, t) d\sigma(y) = r^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u.
\end{aligned}$$

Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

jest laplasjanem dla funkcji radialnych na  $\mathbb{R}^N$ , a więc pokazaliśmy, że radialna funkcja  $w(y, t) = M_u(x, |y|; t)$  spełnia równanie falowe.

Dalej obliczenia prowadzimy w najprostszym przypadku  $N = 3$ . Zaczniemy od spostrzeżenia, że jeżeli  $M_u$ ,  $M_f$ ,  $M_g$  są funkcjami  $r$  klasy  $C^2$ , to funkcje  $v = rM_u$ ,  $\phi = rM_f$  i  $\psi = rM_g$  spełniają relacje

$$\begin{aligned}
v(r; 0) &= \phi(r), \quad v_t(r; 0) = \psi(r), \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2} v &= \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} M_u + M_u \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rM_u) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} v.
\end{aligned}$$

Stosując do  $v$  wzór d'Alemberta (1.6) dostajemy

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \{ \phi(r+t) + \phi(r-t) \} + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} \psi(s) ds.$$

Uwzględniając, że

$$u(x, t) = \lim_{r \searrow 0} M_u(x, r; t) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{r} v(r; t)$$

i parzystość funkcji  $M_f$  i  $M_g$  (która implikuje nieparzystość  $\phi$  i  $\psi$ ), ostatecznie dochodzimy do wzoru Kirchhoffa (3.2)

$$u(x, t) = \lim_{r \searrow 0} \left[ \frac{1}{2r} \left\{ \phi(t+r) - \phi(t-r) \right\} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \psi(s) ds \right] = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=t} + \psi(t).$$

□

**Twierdzenie 3.4.** *Jeżeli wymiar  $N$  jest liczbą parzystą,  $f \in C^{N/2+2}(\mathbb{R}^{2N})$  i  $g \in C^{N/2+1}(\mathbb{R}^{2N})$ , to  $u$  dane wzorem*

$$u(x, t) = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (N-1)\sigma_{N+1}} \times \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(N-2)/2} \left( t^{N-1} \int_{B(0,1)} f(x+ty)(1-|y|^2)^{-1/2} dy \right) + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(N-2)/2} \left( t^{N-1} \int_{B(0,1)} g(x+ty)(1-|y|^2)^{-1/2} dy \right) \right]$$

*jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia Cauchy'ego.*

Dowód otrzymujemy stosując metodę zstępowania dla wzoru w Twierdzeniu 3.3.  $\square$

**Uwaga 3.5.** Użycie transformacji Fouriera  $\widehat{\phi}(\xi) = \int \phi(x)e^{-ix \cdot \xi} dx$  pozwala na alternatywne wyprowadzenie wzorów na rozwiązania równania falowego. Mianowicie, kluczowe jest określenie *rozwiązania fundamentalnego* czyli dystrybucji  $E = E_N$  spełniającej równanie  $E_{tt} - \Delta E = \delta(t)$  w sensie przestrzeni dystrybucji  $\mathcal{D}'$ .  $\delta = \delta(t)$  oznacza tu dystrybucję Diraca. Przechodząc do transformat Fouriera względem zmiennych przestrzennych  $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \xi \in \mathbb{R}^N$  otrzymujemy

$$\widehat{E}_{tt} + |\xi|^2 \widehat{E} = \mathbb{I}(t),$$

co prowadzi przez proste całkowanie równania różniczkowego zwyczajnego do

$$\widehat{E}_N(\xi, t) = \mathbb{I}(t) \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}.$$

W szczególności, dla  $N = 3$  można sprawdzić, że

$$E_3(x, t) = \mathbb{I}(t) \frac{1}{4\pi t} \delta_{S(0,t)}(x),$$

gdzie  $\delta_{S(0,t)}$  oznacza miarę skupioną na powierzchni sfery o promieniu  $t$ .

**Uwaga 3.6.** Wzory w Twierdzeniu 3.3 i Twierdzeniu 3.4 zgadzają się jakościowo z twierdzeniem o jednoznaczności:  $u$  w punkcie  $(x_0, t_0)$  zależy od wartości  $f$  i  $g$  w kuli  $\{x : |x - x_0| \leq t_0\}$ .

Dokładniej: Dla  $N = 1$   $u$  zależy od wartości  $g$  na  $\{x : |x - x_0| \leq t_0\}$  i od  $f$  dla  $x - x_0 = \pm t_0$ . Dla  $N = 3$  (i dla  $N \geq 3$  nieparzystych):  $u$  zależy od wartości  $f$  i  $g$  na dowolnie małym otoczeniu sfery  $\{x : |x - x_0| = t_0\}$ . Dla  $N = 2$  (i dla  $N$  parzystych):  $u$  zależy od wartości  $f$  i  $g$  na całej kuli  $\{x : |x - x_0| \leq t_0\}$ , ale większy wpływ na  $u$  mają wartości danych początkowych w pobliżu sfery  $\{x : |x - x_0| = t_0\}$ .

Oznacza to, że w  $\mathbb{R}^3$  pakiety falowe są zlokalizowane, natomiast w  $\mathbb{R}^2$  zachodzi *dyfuzja fal*.

#### 4. Zasada Huygensa

Wyniki otrzymane w poprzednim rozdziale można zinterpretować w następujący sposób: w  $\mathbb{R}^3$  pakiety falowe opisane równaniem (1.2) mają wyraźne fronty i końce (czoła i tyły) fali, natomiast w  $\mathbb{R}^2$  front fali jest wyraźny, natomiast fala gaśnie powoli do zera.

Ścisłej można to sformułować dla  $N = 3$  w następujący sposób:

**Wniosek 4.1.** *Jeżeli dane początkowe  $f, g$  mają zwarte nośniki i  $S = \text{supp } f \cup \text{supp } g$ , to  $u(x, t) = 0$  dla wszystkich  $t \notin [t_1(x), t_2(x)]$ , gdzie  $t_1(x) = \inf\{t > 0 : S(x, t) \cap S \neq \emptyset\}$ ,  $t_2(x) = \sup\{t > 0 : S(x, t) \cap S \neq \emptyset\}$ , a  $S(x, t)$  jest sferą o promieniu  $t$  i środku w  $x$ .*

Opierając się na zasadzie Huygensa łatwo zinterpretować wynik z Zadania 12.1 dla  $k = \pm 1$ . Nie można bowiem żądać, aby na charakterystyce równania (po której propagują się zaburzenia) spełnione były dwa niezależne warunki na rozwiązanie.

#### 5. Zagadnienie niejednorodne – zasada Duhamela

Zagadnienie początkowe dla niejednorodnego równania falowego w  $\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + F, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \end{aligned}$$

rozwiążemy (podobnie jak to robi się dla innych niejednorodnych zagadnień liniowych) poszukując  $u$  w postaci sumy  $u = u_1 + u_2$ , gdzie  $u_1$  i odpowiednio  $u_2$  spełniają warunki

$$\begin{aligned} (u_1)_{tt} &= \Delta u_1 + F, \\ u_1(x, 0) &= 0, \quad (u_1)_t(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (u_2)_{tt} &= \Delta u_2, \\ u_2(x, 0) &= f(x), \quad (u_2)_t(x, 0) = g(x). \end{aligned}$$

**Twierdzenie 5.1** (Zasada Duhamela). *Jeżeli  $F \in C^{[N/2]+1}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ , a przez  $v(x, t; s)$  jest oznaczone rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego*

$$\begin{aligned} v_{tt} &= \Delta v, \\ v(x, 0; s) &= 0, \quad v_t(x, 0; s) = F(x, s), \end{aligned}$$

to  $u_1$  jest superpozycją rodziny funkcji  $v = v(\cdot, \cdot; s)$

$$u_1(x, t) = \int_0^t v(x, t-s; s) ds.$$



*Dowód.* Jak łatwo widać:  $u_1(x, 0) = 0$ . Natomiast

$$(u_1)_t = v(x, 0; t) + \int_0^t v_t(x, t-s; s) ds = \int_0^t v(x, t-s; s) ds$$

znika dla  $t = 0$ . Ponadto

$$(u_1)_{tt} - \Delta u_1 = v_t(x, 0; t) + \int_0^t (v_{tt} - \Delta v)(x, t-s; s) ds = v_t(x, 0; t) = F(x, t),$$

co kończy dowód.  $\square$

## 6. Metoda Fouriera dla zagadnień brzegowych

Matematyczną idealizacją opisu drgań struny zaczepionej (tak jak w instrumentach muzycznych) jest zagadnienie początkowo-brzegowe

$$(6.1) \quad \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \end{aligned}$$

gdzie  $(x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty)$ . Długość struny została (bez straty ogólności) wybrana równą  $\pi$ . Warunek  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  oznacza sztywne zamocowanie struny, ale można byłoby zamiast niego przyjąć np.  $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$ , lub inne liniowe warunki brzegowe.

Wprawdzie wzór d'Alemberta (1.4) wyznacza dowolne rozwiązanie równania, ale niełatwo byłoby znaleźć funkcje  $\phi, \psi$  tak aby spełnione były warunki brzegowe (i początkowe) tak, jak zrobić to można w Zadaniu 12.2 w zagadnieniu na półprostej  $\mathbb{R}^+$ . Istotnie, zaburzenia rozchodzą się wzdłuż charakterystyk  $x+t = \text{const}$ ,  $x-t = \text{const}$ , a przy spotkaniu brzegu „odbijają się” zmieniając fazę. Po kilku takich odbiciach wzory na  $\phi$  i  $\psi$  byłyby bardzo skomplikowane. Posłużymy się więc inną metodą (pochodzącą od J. Fouriera a zastosowaną po raz pierwszy dla równania przewodnictwa cieplnego), polegającą na rozdzieleniu zmiennych. Otóż, chcemy znaleźć rozwiązanie równania (1.1) postaci  $u(x, t) = w(x)T(t)$  dla pewnych (odpowiednio regularnych) funkcji  $w, T$  jednej zmiennej. Oznaczając pochodne przez  $\dot{\phantom{x}} = d/dt$  i  $\prime = d/dx$ , otrzymujemy

$$\ddot{T}w = Tw'', \quad \text{tzn.} \quad \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{w''}{w} = \text{const.}$$

Rozwiązaniem tego zagadnienia na wartości własne dla funkcji  $w$  jest oczywiście  $w(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$ , jeżeli  $\text{const} = -k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Uwzględniając warunki brzegowe otrzymujemy  $w(x) = c_1 \sin kx$  i  $T(t) = d_1 \sin kt + d_2 \cos kt$ . Równanie (1.1) jest liniowe, a zatem można rozważać superpozycje takich (elementarnych) rozwiązań, czyli

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx$$

dla współczynników  $a_k, b_k$  (pochodzących od stałych  $c_1$  i  $d_1$  dla różnych  $k$ ) spełniających

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = f(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} ka_k \sin kx = g(x).$$

Powyższe formalne obliczenia wymagają aby *szereg Fouriera* przedstawiający  $u$  był zbieżny, podobnie jak i szeregi zróżniczkowane. Aby otrzymać rozwiązanie  $u$  klasyczne, należy jeszcze dodać założenia np.  $f \in C^4, g \in C^3$  gwarantujące jednostajną zbieżność szeregów Fouriera przedstawiających  $u, u_{xx}, u_{tt}$ . Rzeczywiście, wtedy  $a_k = \mathcal{O}(k^{-4}), b_k = \mathcal{O}(k^{-3})$ .

W Zadaniu 12.3 zobaczymy, że „rozsądne” warunki początkowe nie muszą wcale prowadzić do rozwiązań klasycznych (6.1). W Rozdziale 9 zostanie pokazane, jak można uogólnić pojęcie rozwiązania aby nadać sens formalnym rozwiązaniom z Zadania 12.3.

**Uwaga 6.1.** Zagadnienie brzegowe dla równania falowego w prostokącie jest źle postawione. To znaczy, że na ogół nie można zadać wartości  $u$  na całym brzegu obszaru czasowo-przestrzennego  $\Omega$  (por. własności charakterystyk równania falowego). Zadziwiające jest przy tym, że warunki rozwiązalności zależą od własności algebraicznych ilorazu długości boków prostokąta.

## 7. Zagadnienie na wartości własne dla laplasjanu

Nietrudno zauważyć, że procedurę z poprzedniego rozdziału można uogólnić na przypadek równania (1.2) uzupełnionego warunkami brzegowymi i początkowymi. Rozdzielenie zmiennych  $u(x, t) = w(x)T(t)$  prowadzi wówczas (w przypadku jednorodnych warunków Dirichleta na brzegu obszaru  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ) do zagadnienia na wartości własne dla równania Helmholtza

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \Delta w + \lambda w &= 0, \\ w|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Można oczywiście rozważać inne (liniowe) warunki brzegowe, np. warunek Neumanna  $\partial w / \partial \bar{n} = 0$  na  $\partial\Omega$ , czy warunek Robina  $w + c\partial w / \partial \bar{n} = 0$  na  $\partial\Omega$ .

W niektórych przypadkach zagadnienie (7.1) można rozwiązać uzyskując jawne formuły na funkcje własne  $w$  i wartości własne  $\lambda$ .

**Przykład 7.1.**  $\Omega = \prod_{k=1}^N (0, a_k) \subset \mathbb{R}^N$  jest prostopadłością. Wówczas dla  $N = 1$   $m$ -ta funkcja własna jest postaci  $u_m(x) = \sin(m\pi x/a_1)$ , a  $m$ -ta wartość własna jest równa  $\lambda = \pi^2 m^2/a_1^2$ . W wyższych wymiarach otrzymujemy funkcje własne postaci

$$u_{m_1 \dots m_N}(x) = \prod_{k=1}^N \sin \frac{m_k \pi x_k}{a_k}$$

wraz z wartościami własnymi

$$\lambda = \lambda_{m_1 \dots m_N} = \pi^2 \sum_{k=1}^N \frac{m_k^2}{a_k^2};$$

$m_k$  są tu dodatnimi liczbami całkowitymi.

**Przykład 7.2** (por. [4]).  $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  jest kołem na płaszczyźnie. W tym przypadku równanie Helmholtza  $\Delta w + \lambda w = 0$  rozwiązujemy rozdzielając zmienne w biegunowym układzie współrzędnych:  $w(r, \vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta)$ . Pamiętając o postaci laplasjanu w zmiennych biegunowych

$$\Delta w = w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta},$$

dochodzimy do układu

$$(7.2) \quad \begin{aligned} r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R &= 0, \\ \Theta'' + n^2\Theta &= 0. \end{aligned}$$

Równanie (7.2) nazywa się równaniem Bessela. Warunki brzegowe implikują, że  $R(1) = 0$ , a funkcja  $\Theta$  jest okresowa z okresem  $2\pi$  i stąd  $n \in \mathbb{N}$ .

Rozwiązaniami równania (7.2) są funkcje związane z funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, rzędu  $n$ , oznaczanymi tradycyjnie  $J_n$  i  $Y_n$ , tzn.  $R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$  dla pewnego  $\lambda$ . Używając metody Frobeniusa można uzyskać ich przedstawienia za pomocą iloczynów potęg  $z$  i szeregów potęgowych. Mianowicie

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \\ Y_n(z) &= \frac{1}{\pi} \left\{ 2J_n(z) \log \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} (\Psi(n+k+1) + \Psi(k+1)) \right\}, \end{aligned}$$

gdzie  $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  jest pochodną logarytmiczną funkcji  $\Gamma$  Eulera. Faktycznie, rozwiązanie zagadnienia na wartości własne w kole zawiera tylko funkcje  $J_n$  regularne w  $z = 0$ . Ostatecznie dostajemy

$$w_{nm}(r, \vartheta) = J_n(k_{nm}r)(c_1 \sin n\vartheta + c_2 \cos n\vartheta),$$

dla  $n = 0, 1, \dots$  i  $m = 1, 2, \dots$ . Ponieważ  $R(1) = 0$ , a więc  $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$  i  $\sqrt{\lambda} = k_{nm}$  jest  $m$ -tym pierwiastkiem  $n$ -tej funkcji Bessela  $J_n$ . Interesujące jest prześledzenie zachowania się funkcji własnych  $w_{nm}$ , w tym badanie linii węzłów  $\{x : w_{nm}(x) = 0\}$ .

W wyższych wymiarach ważnymi funkcjami specjalnymi są *harmoniki sferyczne* związane z funkcjami własnymi laplasjanu w  $\mathbb{R}^N$ .

W ogólnym przypadku zachodzi

**Twierdzenie 7.3.** *Jeżeli  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  jest obszarem ograniczonym, to istnieje ciąg wartości własnych  $\lambda_m$ , który rośnie do nieskończoności. Unormowane funkcje własne  $\{w_m\}$  tworzą ciąg ortonormalny zupełny w przestrzeni  $L^2(\Omega)$ .*

Dowód tego wyniku można znaleźć np. w [3].  $\square$

Jak szybko rosną wartości własne można łatwo prześledzić na przykładzie kostki  $\prod_{k=1}^N (0, a)$  w  $\mathbb{R}^N$ . Otóż wartość  $\mu_m = (a^2/\pi^2)\lambda_m = \sum_{k=1}^N m_k^2$  jest kwadratem odległości punktu kratowego o współrzędnych  $(m_1, \dots, m_N)$ ,  $m_k > 0$ , od 0. Punktów kratowych w kuli o promieniu  $R$ ,  $R \rightarrow \infty$ , jest asymptotycznie  $2^{-N}\omega_N R^N$ . Stąd obliczamy, że  $m \sim \pi^{N/2} 2^{1-N} (N\Gamma(N/2))^{-1} R^N$ , czyli innymi słowy  $\lambda_m \sim R^2 \sim c_N m^{2/N} = \mathcal{O}(m^{2/N})$  gdy  $m \rightarrow \infty$ , por. [12]. Okazuje się, że analogiczny wynik zachodzi dla dowolnych obszarów ograniczonych  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , co udowodnił w 1911 roku H. Weyl, rozwiązując problem postawiony przez D. Hilberta.

**Twierdzenie 7.4** (H. Weyl, L. Hörmander). *Dla gładkich obszarów ograniczonych  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  zachodzi relacja asymptotyczna*

$$\lambda_m \sim 4\pi \left( \frac{\Gamma(N/2 + 1)}{|\Omega|} \right)^{2/N} m^{2/N}, \quad \text{gdy } m \rightarrow \infty.$$

Uniwersalność tego wyniku zainspirowała M. Kaca do postawienia pytania: „Czy można usłyszeć kształt bębna?”, co matematycznie można sformułować jako pytanie: „Czy obszary, dla których ciągi wartości własnych laplasjanu są takie same, są izometryczne?” Negatywną odpowiedź na ten problem podali w 1992 roku Gordon, Webb i Wolpert, konstruując nieprzystające wielokąty (i wielościany) o identycznych widmach, tzn. zbiorach wartości własnych.

Zagadnienie (7.1) można sformułować w postaci wariacyjnej. Mianowicie,

$$\lambda_1 = \inf_{v \neq 0, v|_{\partial\Omega} = 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2}{\int_{\Omega} v^2},$$

a funkcja realizująca kres jest równa pierwszej funkcji własnej. Jest ona stałego znaku wewnątrz  $\Omega$ . Następnie zachodzi *zasada minimaksowa*:

$$\lambda_{m+1} = \max_{v_1, \dots, v_m} \min_{\{v \neq 0: \int_{\Omega} v v_j = 0, j=1, \dots, m, v|_{\partial\Omega} = 0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2}{\int_{\Omega} v^2}.$$

Istotnie, równanie Helmholtza jest konsekwencją równań Eulera–Lagrange’a dla powyższego zagadnienia minimalizacji z więzami, a  $\lambda_m$  są kolejnymi mnożnikami Lagrange’a, por. np. [3], [12].

### 8. Tłumione równanie falowe

Równanie linii telegraficznej

$$(8.1) \quad u_{tt} + 2ku_t = \Delta u$$

opisuje dla  $N = 1$  rozchodzenie się tłumionych sygnałów w przewodzie linii telegraficznej, który charakteryzuje się niezerowym oporem. Jest ono również użyteczne jako hiperboliczny model rozprzestrzeniania się ciepła dla  $N \geq 1$  w (nieco innej) postaci  $\varepsilon u_{tt} + u_t = \Delta u$  z  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Zagadnienie Cauchy'ego dla równania (8.1) z warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0,$$

udaje się rozwiązać dzięki następującemu podstawieniu z [8, §76.16]:  $w(x, z, t) = u(x, t)e^{kz}$ . W istocie, funkcja  $w$  spełnia równanie falowe (1.2) w wymiarze  $N + 1$ :  $w_{tt} = \Delta w + w_{zz}$ , z warunkami początkowymi

$$w(x, z, 0) = f(x)e^{kz}, \quad w_t(x, z, 0) = 0.$$

W szczególności dla  $N = 1$  fale w linii telegraficznej ulegają dyfuzji, czyli propagują się inaczej niż opisuje to wzór d'Alemberta (1.6) dla nietłumionego równania falowego z  $N = 1$ , ponieważ do otrzymania  $w$  stosujemy wzór Poissona (3.3).

Rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego dla równania (8.1) pozwalają na dokładniejsze zbadanie efektu asymptotycznie parabolicznego zachowania się rozwiązań dla  $t \rightarrow \infty$ . Istotnie, w otrzymanych z metody Fouriera rozwiązaniach elementarnych mamy  $T(t) = \exp(-(k \pm \sqrt{k^2 - \lambda})t)$ , co dla wartości własnych  $\lambda < k^2$  nie wprowadza oscylacji typowych dla rozwiązań równania falowego. Dopiero dla dużych  $\lambda$  pojawiają się drgania o amplitudzie tłumionej czynnikiem  $e^{-kt}$ .

### 9. Słabe rozwiązania

Konstrukcję słabych rozwiązań zagadnienia brzegowo-początkowego z warunkiem Dirichleta

$$(9.1) \quad \begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= F, \\ u(0) &= f, \quad u_t(0) = g, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

przedstawimy wg schematu z [12] (por. [11]), który uogólnia znaną nam metodę Fouriera na metodę (Faedo-)Galërkina. *Przestrzenią energetyczną* operatora  $A = -\Delta$  z warunkiem Dirichleta na brzegu  $\partial\Omega$  jest klasyczna przestrzeń Sobolewa  $H = H_0^1(\Omega)$ . W dalszym ciągu użyjemy oznaczenia  $[\cdot, \cdot]$  na *energetyczny iloczyn skalarny*  $[u, v] = (A^{1/2}u, A^{1/2}v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$  w przestrzeni  $H$ , i  $\mathcal{D}(A)$  na *dziedzinę* operatora  $A$  (czyli zbiór  $v$  takich, że  $v \in H$  i  $Av \in L^2(\Omega)$ ).

**Definicja 9.1.** Element przestrzeni  $\mathcal{X} = C([0, \infty), H) \cap C^1([0, \infty), L^2(\Omega))$  takim, że tożsamość

$$(9.2) \quad - \int_0^T \left( \frac{du}{dt}, \frac{d\eta}{dt} \right) dt + \int_0^T [u, \eta] dt - (g, \eta(0)) = \int_0^T (F, \eta) dt$$

zachodzi dla wszystkich funkcji próbnych  $\eta \in \mathcal{X} \cap \{\eta(T) = 0\}$ ,  $0 < T < \infty$  nazywamy *rozwiązaniem słabym*. Ponadto od słabego rozwiązania wymaga się aby warunek początkowy  $u(0) = f$  spełniony był w sensie granicy

$$\lim_{t \searrow 0} [u(t) - f, u(t) - f] = 0.$$

Tożsamość (9.2) jest otrzymana ze wzoru

$$\left( \frac{d^2 u}{dt^2}, \eta(t) \right) + (Au, \eta(t)) = (F(t), \eta(t)),$$

co w skrócie zapisuje się jako

$$\left( \frac{d^2 u}{dt^2}, \eta \right) + [u, \eta] = (F, \eta),$$

przez całkowanie przez części względem  $t$  (i względem  $x$  w drugim wyrazie)

$$\left( \frac{d^2 u}{dt^2}, \eta \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dt}, \eta \right) - \left( \frac{du(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt} \right).$$

Sensownymi założeniami o regularności danych są:  $f \in H$ ,  $g \in L^2(\Omega)$ ,  $F \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$ .

Nietrudno zauważyć, że słabe rozwiązanie  $u$  takie, że  $u \in C^1([0, \infty), \mathcal{D}(A)) \cap C^2((0, \infty), \mathcal{D}(A))$  jest rozwiązaniem klasycznym.

Rozwiązania słabe zagadnienia (9.1) są jednoznaczne, co wynika z zastosowania tego samego dowodu (metodą energetyczną) co dla rozwiązań klasycznych. Istnienia słabych rozwiązań dowodzi się poszukując  $u$  w postaci szeregu  $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)u_k$ , gdzie  $c_k(t) = (u(t), u_k)$ ,  $u_k$  są funkcjami własnymi  $A$ :  $Au_k = \lambda_k u_k$ . Szereg  $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} c_k(t) (1/\sqrt{\lambda_k}) u_k$  jest zbieżny w  $H$ . Do testowania wybieramy funkcje  $\eta(t) = (T-t)u_k$  i pamiętając, że  $[u(t), u_k] = \lambda_k c_k(t)$ , po standardowych obliczeniach dostajemy

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (f, u_k) \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (g, u_k) \sin \sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) F_k(\tau) d\tau \right\},$$

o ile rozwiązanie istnieje (jednoznaczność zachodzi). Sprawdzenie (czyli synteza) tego wzoru przebiega wg schematu: najpierw dla równania jednorodnego, a następnie dla niejednorodnego ustala się zbieżność w przestrzeni  $H$  (niemal jednostajną względem  $t$ ); następnie pokazuje się zbieżność  $du/dt$  w przestrzeni  $L^2(\Omega)$ , i wreszcie spełnianie warunków początkowych.

Inną metodą praktycznego rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych dla równania falowego jest metoda siatek, gdzie pochodne występujące w równaniu aproksymuje się ilorazami różnicowymi, por. [6].

W tych wykładach zazwyczaj rozważane były rozwiązania klasyczne. Rozwiązania w sensie słabym (w przestrzeniach Sobolewa) i jeszcze ogólniejsze rozwiązania w sensie dystrybucyjnym są systematycznie badane m.in. w [10] i [11].

## 10. Uwagi o zagadnieniu Cauchy'ego dla innych równań

**Klasyfikacja równań różniczkowych drugiego rzędu.** Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu są – z punktu widzenia konkretnych zastosowań jak również abstrakcyjnej teorii – najbardziej interesujące. Nic więc dziwnego, że ich teoria rozwijała się najwcześniej i osiągnęła zdecydowanie najlepszy stan spośród różnych rozdziałów teorii równań cząstkowych. Nie znaczy to, że równania wyższego rzędu niż dwa nie są badane. Zacytujmy tu przykładowo słynne równanie Kortewega–de Vriesa  $u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0$ , wyprowadzone w 1895 roku, a modelujące rozchodzenie się fal na płytkiej wodzie w kanale, a więc fal podlegających *dyspersji*. Równanie to jest nieliniowe, trzeciego rzędu, i ma intrygujące własności algebraiczno-geometryczne, niezależnie od bogactwa efektów jakościowych opisywanych przez jego rozwiązania (np. solitony i ich oddziaływania). Innym ważnym równaniem wyższego rzędu jest równanie (liniowych) drgań belki (czwartego rzędu)  $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$ , typowe dla teorii sprężystości.

Powróćmy jednak do równań drugiego rzędu i to liniowych, a więc do równań postaci  $Lu = F$ , gdzie

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^N b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u.$$

Pierwszy składnik zawierający wszystkie pochodne  $u$  drugiego rzędu nazywany jest *częścią główną*. on nie tylko o charakterze równania i zachowaniu się jego rozwiązań, ale również determinuje jakiego typu dodatkowe założenia (warunki początkowe, brzegowe, ...) dodaje się do równania  $Lu = F$  aby otrzymać sensownie postawione zagadnienie.

**Definicja 10.1.**  $L$  jest operatorem *eliptycznym* jeżeli macierz

$$A = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^N$$

jest ściśle dodatnio (lub ściśle ujemnie) określona. Typowym przykładem operatorów eliptycznych jest operator Laplace'a

$$L = \Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

i operator Schroedingera  $-\Delta + V$ , gdzie  $V = V(x)$  jest potencjałem. Definicja eliptyczności oczywiście nie zależy od wyrazów niższego rzędu takich jak  $Vu$  w (stacjonarnym) równaniu Schroedingera.

Operator  $L$  nazywa się *hiperbolicznym*, jeżeli macierz współczynników  $A(x)$  jest w każdym punkcie  $x$  sygnatury  $(1, N)$  lub  $(N, 1)$ . Kanonicznym przykładem jest operator falowy czyli d’alembertian

$$L = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Operator  $L$  nazywa się *parabolicznym*, jeżeli macierz  $A$  definiuje formę półokreśloną. W szczególności, operator z równania przewodnictwa cieplnego

$$L = \Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}$$

jest paraboliczny.

Poza tą klasyfikacją są oczywiście inne operatory, np. operator ultrahyperboliczny typu  $Lu = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4}$ , czy operator Tricomiego  $Lu = x_2u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2}$  zmiennego typu w zależności od znaku  $x_2$ .

Okazuje się, że – w przeciwieństwie do teorii równań różniczkowych zwyczajnych – niewiele jest wyników o istnieniu rozwiązań ogólnych liniowych równań różniczkowych cząstkowych typu  $Lu = F$ .

Jeżeli  $L$  ma stałe współczynniki, to tak jest: dla dowolnej funkcji  $F$  równanie  $Lu = F$  ma lokalnie rozwiązanie (twierdzenie Malgrange’a–Ehrenpreisa–ojasiewicza z początku lat pięćdziesiątych XX wieku). Ale już dla przypadku zmiennych współczynników H. Lewy w 1957 roku podał przykład równania (o współczynnikach zespolonych) nie posiadającego rozwiązań. Przykład ten uproszczony został przez Garabediana i Gruszyna. Jeżeli równanie  $u_{x_1} + ix_1u_{x_2} = F(x_1, x_2)$  ma rozwiązanie, to  $u$  jest funkcją analityczną (a więc jego rozwiązania nie mogą istnieć dla  $F$  nieanalitycznych).

Aby zrozumieć gdzie można (a gdzie nie należy) nakładać dodatkowe warunki na rozwiązanie, potrzebne jest pojęcie *powierzchni charakterystycznej*.

**Definicja 10.2.** (Hiper)powierzchnia  $S = \{\Phi = 0\}$ , gdzie  $\Phi: \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , nazywa się *charakterystyczną* dla operatora  $L$ , jeżeli w każdym punkcie  $x \in S$  spełnione jest równanie (nieliniowe, pierwszego rzędu)  $(A(x)\nabla\Phi, \nabla\Phi) = 0$ .

Stąd widać, operatory eliptyczne nie posiadają (rzeczywistych) powierzchni charakterystycznych. Dla równania przewodnictwa cieplnego równanie  $|\nabla_x \Phi| = 0$  oznacza, że powierzchnie  $\{t = \text{const}\}$  są charakterystyczne. Dla d’alembertianu stożki o równaniach  $|x - x_0| \pm (t - t_0) = 0$  są powierzchniami charakterystycznymi.

W przypadku dwóch zmiennych  $N = 2$ , krzywe charakterystyczne dla operatora

$$a \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$



można wyznaczyć z równania  $a(x_2')^2 - 2bx_2' + c = 0$ , ponieważ  $\Phi(x_1, x_2) = 0$  określa krzywą  $x_2 = x_2(x_1)$  (lub  $x_1 = x_1(x_2)$ ), dla której  $\Phi_{x_1} + \Phi_{x_2}x_2' = 0$ , a zatem  $x_2' = -\Phi_{x_1}/\Phi_{x_2}$ . Ostatecznie równania  $x_2' = a^{-1}(b \pm \sqrt{b^2 - ac})$  określają dwie rodziny krzywych charakterystycznych (o ile, rzecz jasna,  $b^2 > ac$ ).

Podobnie jak zasada Huygensa 4.1 mówi o rozchodzeniu się fal, można powiedzieć ogólniej, że osobliwości (lub zaburzenia) rozwiązań propagują się wzdłuż charakterystyk.

**Twierdzenie typu Cauchy'ego–Kowalewskiej.** Jednym z niewielu ogólnych wyników w teorii równań różniczkowych cząstkowych jest twierdzenie Cauchy'ego–Kowalewskiej (–Darboux–Goursata) mówiące o rozwiązaniach analitycznych zagadnień początkowych (czyli zagadnień Cauchy'ego) dla równań o współczynnikach i danych analitycznych postawionych na powierzchniach analitycznych, które nie są charakterystyczne (w żadnym punkcie).

**Przykład 10.3.** Z wzoru d'Alemberta (1.6) łatwo można wywnioskować, że dla danych początkowych  $(f, g)$  analitycznych rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego jest analityczne.

Natomiast dla równania przewodnictwa cieplnego poniższy przykład pochodzący od S. Kowalewskiej pokazuje, że zadanie warunku analitycznego na powierzchni charakterystycznej może prowadzić do kłopotów (rozwiązanie nie jest analityczne):

**Przykład 10.4.**

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = (1 + x^2)^{-1}.$$

Gdyby istniało rozwiązanie analityczne w otoczeniu punktu  $(0, 0)$ , to  $u(x, t) = \sum u_{mn}x^m t^n$ , a współczynniki  $u_{mn}$  spełniałyby relacje

$$u_{2m+1, n} = 0, \quad u_{2m, n} = (-1)^{m+1} (2m + 2n)! / ((2m)! n!).$$

Szereg z takimi współczynnikami jest rozbieżny w otoczeniu każdego punktu  $(0, t)$ ,  $t > 0$ .

Najbardziej chyba ogólną postacią równań (a raczej układów równań), dla których można udowodnić twierdzenie o analityczności rozwiązań, jest następująca (układ równań quasiliniowych pierwszego rzędu w postaci normalnej)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m G_{ijk}(u_1, \dots, u_m) \frac{\partial u_j}{\partial x_k},$$

$$u_i(x, 0) = \phi_i(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

**Twierdzenie 10.5** (typu Cauchy’ego–Kowalewskiej). *Jeżeli współczynniki  $G_{ijk}$  i dane początkowe  $\phi_i$  są analityczne, to w otoczeniu dowolnego punktu  $(x, 0)$  istnieje (lokalne) rozwiązanie analityczne postaci  $u_i(x, t) = \sum_{\alpha, \ell} c_{\alpha, \ell}^i x^\alpha t^\ell$ . Rozwiązanie to jest jednoznaczne w szerszej klasie  $u \in C^\infty$  funkcji gładkich (to ostatnie stwierdzenie pochodzi od Holmgrena).*

**Uwaga.** Zagadnienie Cauchy’ego dla jednego równania (rzędu  $\geq 2$ ) z danymi na powierzchni niecharakterystycznej redukuje się do takiego właśnie układu.

**Przykład 10.6** (Istotność założeń o analityczności). Rozważmy równanie Laplace’a  $\Delta u = 0$  w  $\mathbb{R}^3$  (wystarczy lokalnie) z warunkami Cauchy’ego

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) = 0.$$

Ponieważ funkcje harmoniczne są analityczne, więc powyższe zagadnienie nie może mieć rozwiązań gdy  $\varphi$  nie jest funkcją analityczną.

Rozwiązanie zagadnienia Cauchy’ego nie musi zależeć w ciągły sposób od danych początkowych. Jest tak jednak dla równań typu hiperbolicznego, por. uwagę po Twierdzeniu 1.2 – mówimy wtedy, że zagadnienie jest *dobrze postawione*.

**Przykład 10.7** (Hadamarda – nieciągłość rozwiązań względem danych początkowych). Rozważmy równanie Laplace’a  $\Delta u = 0$  w kole  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ , z warunkami

$$u(x_1, 0) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx_1, \quad u_{x_2}(x_1, 0) = 0.$$

Rozwiązania (jedyne!) mają postać

$$u = u_n, \quad u_n(x_1, x_2) = e^{-\sqrt{n}} \cosh(nx_2) \cos nx_1.$$

Widać, że  $u_n(x_1, 0) \rightarrow 0$  gdy  $n \rightarrow \infty$ , nawet wraz z pochodnymi

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^k}(x_1, 0) \rightarrow 0$$

dla każdego  $k$ . Niemniej jednak  $\sup_n |u_n(x_1, x_2)| = \infty$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}^2$  z  $x_2 \neq 0$ .

## 11. Nieliniowe równania falowe i inne uwagi

Nieliniowe równania falowe uogólniające (2.1) pojawiają się w relatywistycznej mechanice kwantowej. Dla przykładu rozważmy równanie Liouville’a  $u_{tt} - u_{xx} = ge^u$  oraz równanie Sine–Gordona  $u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u$ . Na ogół, dla równań typu (2.1) nie można znaleźć jawnych wzorów na rozwiązania (typu (1.4)), ale dla powyższych przykładów znane są rodziny rozwiązań typu (uogólnionej) *biegnącej fali* równe

$$u(x, t) = \log \frac{8\phi'(x+t)\psi'(x-t)}{g(\phi(x+t) - \psi(x-t))^2}$$

(z funkcjami  $\phi, \psi \in C^3$  i  $\phi', \psi' > 0$ ) oraz

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arc\,tg} \left( \exp \left( \pm \sqrt{\frac{g}{1-a^2}} (x - at - x_0) \right) \right), \quad 0 < a < 1,$$

odpowiednio.

Kompletne wyniki dotyczące istnienia, regularności i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równań typu  $u_{tt} - \Delta u = \pm u^p$  znane są stosunkowo od niedawna, i istotnie zależą od wartości wykładnika  $p$ . Asymptotykę rozwiązań równań typu (2.1) dla  $t \rightarrow \infty$  udaje się w niektórych przypadkach określić z pomocą (nieliniowej) *teorii rozpraszania*. Chodzi tu o znalezienie warunku początkowego  $\psi = (f, g)$  takiego, że  $\|u(t) - T_0(t)\psi\| \rightarrow 0$  gdy  $t \rightarrow \infty$ , gdzie  $u(t)$  jest rozwiązaniem równania nieliniowego, a  $T_0(t)\psi$  jest rozwiązaniem liniowego równania falowego  $v_{tt} - \Delta v = 0$  z warunkiem początkowym  $\psi$  zależnym od  $u(t)$ ,  $\|\cdot\|$  oznacza normę w pewnej funkcyjnej przestrzeni Banacha. Dokładniejsze wyniki typu  $\|u(t) - T_0(t)\psi\| = o(\|T_0(t)\psi\|)$  dla  $t \rightarrow \infty$  interpretuje się jako asymptotycznie liniowe zachowanie się rozwiązań równania nieliniowego.

Natomiast *liniowa teoria rozpraszania* zajmuje się opisem asymptotyki liniowej (pół)grupy operatorów za pomocą specjalnych trajektorii pewnej znanej liniowej (pół)grupy operatorów. W konkretnym przypadku równania falowego  $v_{tt} - \Delta v = 0$  i równania Kleina–Gordona  $u_{tt} - \Delta u + Vu = 0$  z zadaniem potencjałem  $V = V(x)$  „małym” dla  $|x| \rightarrow \infty$ , interesuje nas tu wyznaczenie asymptotyki rozwiązania dla  $t \rightarrow \pm\infty$   $u(t) = T(t)\psi$  z warunkiem początkowym  $\psi$  za pomocą pewnych specjalnych rozwiązań  $v(t) = T_0(t)\psi_{\pm}$ , z odpowiednio dobranymi warunkami początkowymi  $\psi_{\pm}$ . Mówiąc dokładniej, staramy się dopasować rozwiązanie  $T_0(t)\psi_{\pm}$  prostszego równania do zadanego rozwiązania trudniejszego równania  $T(t)\psi$  tak, aby

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \|T(t)\psi - T_0(t)\psi_{\pm}\| = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \|T(-t)T_0(t)\psi_{\pm} - \psi\| = 0.$$

Jak widać, chodzi tu o zdefiniowanie *operatorów falowych* jako granic w mocnym sensie

$$\Omega^{\pm}(T, T_0) = s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} T(-t)T_0(t)$$

na dostatecznie dużym zbiorze warunków początkowych  $\psi$ . *Operator (macierz) rozpraszania*  $S = (\Omega^-)^{-1}\Omega^+$  określa wówczas jak przejść od  $\psi_+$  do  $\psi_-$ .  $S$  mierzy zatem wpływ potencjału  $V$  na ewolucję  $u = u(t) = T(t)\psi$  porównywaną do ewolucji  $v = v(t) = T_0(t)\psi_{\pm}$ , przy przejściu od przeszłości ( $t \rightarrow -\infty$ ) do przyszłości ( $t \rightarrow \infty$ ). Dokładniej o teorii rozpraszania można przeczytać w [14, III, Scattering Theory].

## 12. Zadania

**Zadanie 12.1.** Rozwiązać (używając wzorów d'Alemberta) następujące zagadnienie dla równania falowego  $u_{tt} = u_{xx}$  z warunkami  $u = h$ ,  $\partial u / \partial \bar{n} = g$

zadanymi na prostej  $t = kx$  ( $k > 0$ ,  $\bar{n}$  jest wektorem normalnym do tej prostej). Zbadać przypadek  $k = \pm 1$  (tzw. zagadnienie Goursata).

**Zadanie 12.2.** Rozwiązać, korzystając ze wzoru d'Alemberta, następujące zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania falowego

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{w } \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

(w szczególności dla  $f(x) = x \exp(-x^2)$ ,  $g(x) = 0$ ).

Co będzie, gdy założyć  $u_x(0, t) = 0$  zamiast warunku brzegowego  $u(0, t) = 0$ ?

**Zadanie 12.3.** Rozwiązać metodą Fouriera zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania struny

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{w } \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\},$$

(i)  $u(x, 0) = 2x$  dla  $0 < x < 1/2$ ,  $u(x, 0) = 2(1-x)$  dla  $1/2 < x < 1$ ,  
 $u_t(x, 0) = 0$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ;

(ii)  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0$  dla  $0 < x < a$  i dla  $b < x < 1$ ,  $u_t(x, 0) = 1$  dla  
 $a \leq x \leq b$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .

Czy otrzymane szeregi Fouriera można dwukrotnie różniczkować?

**Zadanie 12.4.** Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego w  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , z warunkami początkowymi  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 1$  dla  $|x| \leq 1$ ,  $u_t(x, 0) = 0$  dla  $|x| > 1$ . Porównać wyniki i zinterpretować zasadę Huygensa na powyższych przykładach.

**Zadanie 12.5.** Ekwipartycja energii. Jeżeli  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania struny  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ , z gładkimi warunkami początkowymi  $f, g$  o zwartych nośnikach, to funkcje energii potencjalnej i kinetycznej

$$p(t) = \frac{1}{2} \int u_x^2(x, t) dx \quad \text{i} \quad k(t) = \frac{1}{2} \int u_t^2(x, t) dx$$

są poprawnie określone. Pokazać, że  $E(t) = k(t) + p(t)$  nie zależy od  $t$ , oraz  $k(t) = p(t)$  dla wszystkich dostatecznie dużych  $t$ .

**Zadanie 12.6.** Sprawdzić, że szereg

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \Delta^k f(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \Delta^k g(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

formalnie spełnia równanie falowe  $u_{tt} = \Delta u$  z warunkami  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ . Podać (przykłady) dla jakich klas funkcji  $f$  i  $g$  powyższy szereg przedstawia faktycznie rozwiązanie. A czy szereg ten ma sens dla  $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ?

Wskazówka: porównać z zasadą Huygensa.

**Zadanie 12.7.** Udowodnić, że rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania falowego  $u_{tt} = \Delta u$  w  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  z warunkami  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ ,  $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ , spełnia oszacowanie  $|u(x, t)| \leq C/t$ ,  $t > 0$ , dla pewnej stałej  $C > 0$ .

**Zadanie 12.8.** Jeżeli  $u$  jest funkcją harmoniczną w  $\mathbb{R}^3$  (tzn.  $u \in C^2$ ,  $\Delta u = 0$ ), to spełnia sferyczną własność średniej

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(x,r)} u(y) d\sigma(y).$$

Udowodnić to korzystając ze wzoru Kirchhoffa dla rozwiązań równania falowego (niezależnych od  $t$ ).

**Zadanie 12.9.**  $U \subset \mathbb{R}^3$  jest ograniczonym zbiorem otwartym z gładkim brzegiem. Pokazać, że zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= h \quad \text{wewnątrz } U_T = U \times (0, T], \\ u &= f \quad \text{na } \Gamma_T = \overline{U_T} \setminus U_T, \quad u_t = g \quad \text{na } U \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Wskazwka: rozważyć całkę energii  $E(t) = (1/2) \int_U (w_t + |\nabla_x w|^2) dx$  dla różnicy  $w$  dwóch rozwiązań.

**Zadanie 12.10.** Udowodnić, że jeżeli  $f \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ ,  $g \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^2)$  dla pewnego  $\alpha > 1/2$ , to istnieje klasyczne rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

**Zadanie 12.11.** Pokazać, że składowe (pola elektromagnetycznego)  $u = E_j$ ,  $u = B_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , rozwiązań równań Maxwella w obszarach  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

$$E_t = \text{rot } B, \quad B_t = -\text{rot } E, \quad \text{div } B = \text{div } E = 0$$

spełniają równanie falowe  $u_{tt} = \Delta u$ .

Oprócz tych zadań, wiele innych można znaleźć w cytowanych podręcznikach, por. też [1].

#### LITERATURA

- [1] P. BILER, T. NADZIEJA, *Problems and Examples in Differential Equations*, M. Dekker, New York, 1992.
- [2] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II (*Partial Differential Equations*), Interscience, New York, 1962.
- [3] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998; przekład polski PWN, Warszawa, 2002.

- [4] S. J. FARLOW, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, John Wiley, New York, 1982.
- [5] G. B. FOLLAND, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, New York, 1976.
- [6] P. GARABEDIAN, *Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.
- [7] I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa, 1975.
- [8] M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego I, II*, PWN, Warszawa, 1957, 1962.
- [9] H. MARCINKOWSKA, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, wyd. drugie, PWN, Warszawa, 1986.
- [10] ———, *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, PWN, Warszawa, 1993.
- [11] V. P. MIKHAILOV, *Differencialnye uravnenia v častnykh proizvodnykh*, Nauka, Moskva, 1983.
- [12] S. G. MIKHLIN, *Linejnye uravnenia v častnykh proizvodnykh*, Vyssiaia Škola, Moskva, 1977.
- [13] A. PELCZAR, J. SZARSKI, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych, część I*, PWN, Warszawa, 1987.
- [14] M. REED, B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, New York, 1972–79.
- [15] J. SHATAH, M. STRUWE, *Geometric Wave Equations*, CIMS, Amer. Math. Soc., New York, Providence, RI, 1998.

PIOTR BILER  
Instytut Matematyczny  
Uniwersytet Wrocławski  
pl. Grunwaldzki 2/4  
50–384 Wrocław  
oraz  
Instytut Matematyczny PAN (2002–2003)  
*E-mail*: Piotr.Biler@math.uni.wroc.pl

## RÓWNANIE CIEPŁA

GRZEGORZ KARCH

### Spis treści

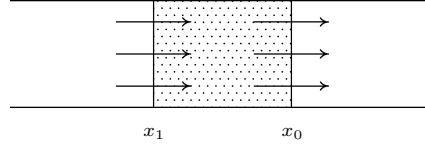
1. Równanie dyfuzji – motywacje fizyczne.
2. Zasada maksimum i jednoznaczność rozwiązań.
3. Zagadnienie Cauchy’ego.
  - 3.1. Transformata Fouriera i jej własności.
  - 3.2. Konstrukcja rozwiązania zagadnienia Cauchy’ego.
4. Kilka uwag o przestrzeniach  $L^p$ .
5. Zagadnienie Cauchy’ego w przestrzeni  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .
6. Asymptotyka rozwiązań gdy  $t \rightarrow \infty$ .
  - 6.1. Rozwinięcie asymptotyczne rozwiązań.
7. Równanie Fokkera–Plancka.
  - 7.1. Rozwiązania stacjonarne.
8. Metoda entropijna.
  - 8.1. Relatywna entropia.
9. Wypukłe nierówności typu Sobolewa.
10. Dodatek. Nierówność Csiszára–Kullbacka.

### 1. Równanie dyfuzji – motywacje fizyczne

Wyobraźmy sobie nieruchomą ciecz (np. wodę) wypełniającą cienką prostą rurkę, do której wprowadzono pewną inną substancję (np. barwnik).

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35K05, 35K15, 35B40.



Następujące prawo opisuje zjawisko dyfuzji: *barwnik przechodzi z obszaru o wyższej koncentracji do obszaru o niższej koncentracji. Dodatkowo, prawo Ficka mówi, że ta prędkość przechodzenia jest proporcjonalna do gradientu koncentracji.*

Wyjaśnijmy to dokładniej. Niech  $u(x, t)$  oznacza koncentrację (tj. masę na jednostkę długości) barwnika w punkcie  $x$  rurki i chwili  $t$ . Masa barwnika w odcinku rurki od  $x_0$  do  $x_1$  równa jest

$$M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u_t(x, t) dx.$$

Masa barwnika w tym odcinku rurki może zmieniać się tylko wpływając lub wypływając przez jej końce. Z prawa Ficka wynika więc, że

$$\frac{dM}{dt} = \text{wplywanie} - \text{wyplywanie} = ku_x(x_1, t) - ku_x(x_0, t),$$

gdzie  $k > 0$  jest stałą proporcjonalności. Różniczkując względem  $x_1$  tożsamość

$$\int_{x_0}^{x_1} u_t(x, t) dx = ku_x(x_1, t) - ku_x(x_0, t),$$

otrzymamy jednowymiarowe równanie dyfuzji

$$u_t = ku_{xx}.$$

Aby wyprowadzić wielowymiarowe równanie dyfuzji potrzebny nam jest pewien fakt z rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych.

**Twierdzenie 1.1** (Greena). *Niech  $\Omega$  oznacza podzbiór  $\mathbb{R}^n$  taki, że jego brzeg  $\partial\Omega$  jest klasy  $C^1$ . Dla każdej funkcji*

$$f = (f_1, \dots, f_n): \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*spełniającej  $f_i \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , prawdziwy jest wzór*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot \bar{n} d\sigma,$$

*gdzie  $\nabla \cdot f = \sum_{k=1}^n \partial f_k / \partial x_k$ , wektor  $\bar{n} = \bar{n}(x)$  jest zewnętrznym wektorem normalnym do  $\partial\Omega$  w punkcie  $x \in \partial\Omega$  oraz  $d\sigma$  oznacza miarę powierzchniową na  $\partial\Omega$ .*



Rozpatrzmy równanie dyfuzji w trzech wymiarach. Funkcja koncentracji  $u = u(x, y, z, t)$  spełnia (na podstawie prawa Ficka) równanie bilansu

$$\iiint_D u_t(x, y, z, t) dx dy dz = \iint_{\partial D} k(\bar{n} \cdot \nabla u) d\sigma,$$

gdzie  $D \subset \mathbb{R}^3$  jest dowolnym spójnym obszarem. Stosujemy Twierdzenie Greena do całki po prawej stronie, co prowadzi do równości

$$\iiint_D u_t(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_D \nabla \cdot k(\nabla u) dx dy dz.$$

Ponieważ  $D$  był dowolnym obszarem, więc otrzymujemy równanie dyfuzji

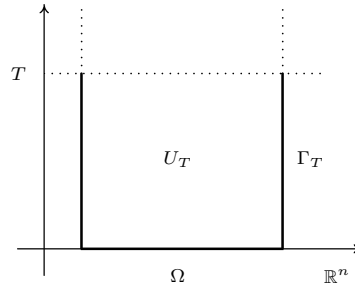
$$u_t = \nabla \cdot (k \nabla u) = k \sum_{i=k}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = k \Delta u.$$

Tak samo wyprowadza się *równanie ciepła* na rozkład temperatury  $u = u(x, y, z, t)$ . Stosuje się tutaj prawo Fouriera, które mówi, że potok ciepła z obszarów cieplejszych do obszarów zimniejszych jest proporcjonalny do gradientu temperatury.

## 2. Zasada maksimum i jednoznaczność rozwiązań

Niech  $\Omega$  będzie ograniczonym obszarem w  $\mathbb{R}^n$ . Dla każdego  $T > 0$  definiujemy

- *walec*:  $U = U_T = \Omega \times (0, T)$  oraz jego
- *brzeg paraboliczny*:  $\Gamma = \Gamma_T = \{(x, t) \in \bar{U} : x \in \partial\Omega \text{ lub } t = 0\}$ .



Zdefiniujmy jeszcze dwie przestrzenie funkcyjne systematycznie używane w poniższych rozważaniach:

- $C(\bar{U})$  oznacza zbiór funkcji ciągłych na domknięciu zbioru  $U$ ;
- $C^{2,1}(U)$  to zbiór funkcji  $f = f(x, t)$  określonych na  $U$  takich, że wszystkie pochodne  $\partial f / \partial t$ ,  $\partial f / \partial x_i$ ,  $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ) są ciągłe.

**Twierdzenie 2.1** (Słaba Zasada Maksimum). *Załóżmy, że funkcja*

$$u \in C^{2,1}(U) \cap C(\bar{U})$$

spełnia nierówność różniczkową

$$\Delta u \geq u_t \quad \text{w walcu } U.$$

Wówczas  $u = u(x, t)$  przyjmuje swoje maksimum na brzegu parabolicznym  $\Gamma$ :

$$\max_{(x,t) \in \bar{U}} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \Gamma} u(x, t).$$

*Dowód. Krok 1.* Załóżmy najpierw, że  $\Delta u > u_t$  w walcu  $U$ . Dla  $0 < \tau < T$  rozważamy

$$U_\tau = \Omega \times (0, \tau), \quad \Gamma_\tau = \{(x, t) \in \bar{U}_\tau : x \in \partial\Omega \text{ lub } t = 0\}.$$

Jeżeli maksimum funkcji  $u(x, t)$  na walcu  $\bar{U}_\tau$  jest przybierane w  $x \in \Omega$  i  $t = \tau$ , to w tym punkcie

$$u_t(x, \tau) \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \Delta u(x, \tau) \leq 0.$$

Zatem  $\Delta u(x, \tau) \leq u_t(x, \tau)$ , a to jest sprzeczne z założeniem.

Podobnie otrzymuje się sprzeczność dla  $x \in \Omega$  i  $0 < t < \tau$ . Zatem dla zbioru  $U_\tau$  mamy

$$\max_{(x,t) \in \bar{U}_\tau} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \Gamma_\tau} u(x, t).$$

Ponieważ  $\max_{\Gamma_\tau} u(x, t) \leq \max_{\Gamma} u(x, t)$ , więc z ciągłości funkcji  $u$  wynika, że

$$\max_{\bar{U}} u = \lim_{\tau \rightarrow T} \max_{\bar{U}_\tau} u = \lim_{\tau \rightarrow T} \max_{\Gamma_\tau} u = \max_{\Gamma} u.$$

*Krok 2.* Zakładamy teraz, że  $\Delta u \geq u_t$  na zbiorze  $U$ . Definiujemy nową funkcję  $v(x, t) = u(x, t) - \kappa t$  dla pewnego ustalonego  $\kappa > 0$ . Łatwo jest sprawdzić następujące nierówności

$$v \leq u \quad \text{oraz} \quad \Delta v - v_t = \Delta u - u_t + \kappa > 0$$

na zbiorze  $U$ . Stosujemy Krok 1 do funkcji  $v(x, t)$  i otrzymujemy

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\bar{U}} (v + \kappa t) \leq \max_{\bar{U}} v + \kappa T = \max_{\Gamma} v + \kappa T \leq \max_{\Gamma} u + \kappa T.$$

Przechodzimy teraz do granicy  $\kappa \rightarrow 0$  i otrzymujemy nierówność

$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\Gamma} u.$$

Nierówność przeciwna jest oczywista i to kończy dowód.  $\square$

**Wniosek 2.2** (Słaba Zasada Minimum). *Założenia*  $u \in C^{2,1}(U) \cap C(\bar{U})$  oraz  $\Delta u \leq u_t$  implikują

$$\min_{\bar{U}} u(x, t) = \min_{\Gamma} u(x, t).$$

*Dowód.* Wystarczy w zasadzie maksimum zastąpić  $u(x, t)$  przez  $-u(x, t)$ .  $\square$

**Uwaga.** Najważniejszą w naszych rozważaniach będzie oczywista obserwacja, że rozwiązania równania ciepła  $u_t = \Delta u$  spełniają zarówno zasadę minimum jak i zasadę maksimum.

Zasady minimum i maksimum są podstawowym narzędziem w dowodach jednoznaczności rozwiązań zagadnienia brzegowo-początkowego dla niejednorodnego równania ciepła

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(x, t), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) &= h(x, t), & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Funkcje  $f, g, h$  są tutaj zadane, a niewiadomą jest  $u = u(x, t)$ .

**Twierdzenie 2.3** (Jednoznaczność rozwiązań). *Zagadnienie brzegowo-początkowe (2.1) może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie  $u \in C^{2,1}(U) \cap C(\bar{U})$ .*

*Dowód.* Przypuśćmy, że mamy dwa rozwiązania  $u, \tilde{u} \in C^{2,1}(U) \cap C(\bar{U})$ . Wtedy ich różnica  $w = u - \tilde{u}$  jest rozwiązaniem zagadnienia

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w_t &= \Delta w, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ w(x, 0) &= 0, & x \in \Omega, \\ w(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Z zasad minimum i maksimum łatwo wynika, że  $w(x, t) = 0$  dla wszystkich  $(x, t) \in \bar{U}$ , bo  $\min_{\bar{U}} w = \max_{\bar{U}} w = 0$ . Zatem  $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ .  $\square$

**Uwaga** (Stabilność rozwiązań). Niech  $u_1(x, t)$  i  $u_2(x, t)$  będą rozwiązaniami zagadnienia (2.1) z tymi samymi funkcjami  $f$  i  $h$ , ale z różnymi warunkami początkowymi:

$$u_1(x, 0) = g_1(x) \quad \text{oraz} \quad u_2(x, 0) = g_2(x).$$

Wtedy różnica  $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  przyjmuje warunek początkowy  $w(x, 0) = g_1(x) - g_2(x)$ , a zatem z zasady maksimum dla  $w(x, t)$  wynika, że

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq \max_{x \in \Omega} (g_1(x) - g_2(x)) \leq \max_{x \in \Omega} |g_1(x) - g_2(x)|.$$

Stosując zasadę minimum dla  $w(x, t)$  otrzymujemy

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) \geq -\min_{x \in \Omega} |g_1(x) - g_2(x)|.$$

Z obu nierówności wynika zatem

$$\max_{x \in \Omega} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{x \in \Omega} |g_1(x) - g_2(x)|$$

dla każdego  $t > 0$ . Ostatnia nierówność mówi, że *mała zmiana warunku początkowego prowadzi do małej zmiany rozwiązania*. Jest to, tzw. stabilność rozwiązań względem warunków początkowych.

**Definicja 2.4.** Mówimy, że zagadnienie (tj. równanie różniczkowe i dodatkowe warunki) jest dobrze postawione w sensie Hadamarda w pewnej przestrzeni funkcyjnej  $\mathcal{X}$ , jeżeli

- (i) istnieje rozwiązanie należące do  $\mathcal{X}$ ;
- (ii) jest to jedyne rozwiązanie w przestrzeni  $\mathcal{X}$ ;
- (iii) rozwiązanie zależy w sposób ciągły od dodatkowych warunków (tj. rozwiązanie jest stabilne).

**Uwaga.** Dotychczas, udowodniliśmy tylko jednoznaczność i stabilność rozwiązań zagadnienia (2.1). Teoria półgrup operatorów liniowych jest jedną z możliwych dróg dowodzenia istnienia rozwiązań. Zainteresowanego czytelnika odsyłam do wykładu D. Wrzoska.

### 3. Zagadnienie Cauchy'ego

*Zagadnieniem Cauchy'ego* nazywamy równanie ciepła w całej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  uzupełnione warunkiem początkowym:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Naszym pierwszym celem będzie konstrukcja rozwiązań tego zagadnienia.

**3.1. Transformata Fouriera.** Dla funkcji  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  (funkcja gładka o zwartym nośniku) definiujemy jej *transformatę Fouriera* wzorem

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} g(x) dx.$$

**Uwaga.** Dla  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ , iloczyn skalarny oznaczamy jako  $x\xi = x \cdot \xi = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$ .

Powyższa całka jest zbieżna dla każdego  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , ponieważ  $g(x)$  ma zwarty nośnik, więc funkcja  $\widehat{g}(\xi)$  jest dobrze zdefiniowana. Dodatkowo,  $\widehat{g}(\xi)$  jest różniczkowalna i różniczkując ją pod znakiem całki otrzymamy wzór:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} (-ix_k) g(x) dx.$$

Łatwo zauważyć, że całka po prawej stronie tego równania jest również zbieżna, ponieważ funkcja  $x_k g(x)$  jest ciągła i ma zwarty nośnik.

Zdefiniujmy teraz wielowskaźnik  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , gdzie  $\alpha_i \in \{0, 1, \dots\}$ , oraz operator różniczkowania

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Indukcyjnie łatwo sprawdza się, że

$$(3.1) \quad D_\xi^\alpha \widehat{g}(\xi) = [(-ix)^\alpha g(x)]^\sim(\xi)$$

gdzie  $(-ix)^\alpha = (-ix_1)^{\alpha_1} \dots (-ix_n)^{\alpha_n}$ . Całkując przez części, podobnie dowodzi się, że

$$(3.2) \quad \widehat{(D_x^\alpha g)}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{g}(\xi).$$

Podsumujmy powyższe ważne własności transformaty Fouriera.

**Wniosek 3.1.** *Transformata Fouriera zamienia różniczkowanie na mnożenie przez zmienną i na odwrot.*

Zauważmy, że pracując z transformatą Fouriera nie musimy ograniczać się do zbioru  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Jest ona, na przykład, dobrze zdefiniowana dla każdej funkcji  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Okazuje się jednak, że oba te zbiory nie są zamknięte na obliczanie transformaty Fouriera, gdyż dla dowolnej funkcji  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , jej transformata nigdy nie ma zwartego nośnika (z wyjątkiem funkcji  $g \equiv 0$ ). Można też podać przykłady funkcji z  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , których transformata Fouriera nie należy do  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Natomiast, klasa Schwartza zdefiniowana poniżej jest zamknięta na operację obliczania transformaty Fouriera.

**Definicja 3.2.** *Klasę Schwartza nazywamy zbiór*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall k \in \mathbb{N} \forall \alpha \in \mathbb{N}^n |x|^k D_x^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Łatwo zauważyć, że  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Proponuję, jako proste ćwiczenie, sprawdzić, że  $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemat 3.3.**

- (a) *Jeżeli  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , to  $\widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*
- (b) *Jeżeli  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , to  $\widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

*Dowód.* Fakt sformułowany w (a) wynika natychmiast z nierówności

$$|\widehat{g}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx < \infty.$$

Aby udowodnić (b) należy najpierw zauważyć, że  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$  oraz  $x_i^k (\partial^\ell / \partial x_j^\ell) g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dla dowolnej funkcji  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , wszystkich  $k, \ell \in \mathbb{N}$  oraz  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Korzystamy teraz ze wzorów (3.1) i (3.2) aby otrzymać

$$\xi_i^k \frac{\partial^\ell}{\partial \xi_j^\ell} \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k (-ix_j)^\ell g(x) dx.$$

Stosujemy następnie punkt (a) aby wywnioskować, że prawa strona powyższej równości należy do  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

**Definicja 3.4.** Dla każdej funkcji  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  definiujemy jej *odwrotną transformatę Fouriera* wzorem

$$\check{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} g(x) dx.$$

Wiemy już, że

$$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Podobnie sprawdza się, że

$$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \check{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dlatego dla każdej funkcji  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  mamy  $(\widehat{\check{g}}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Twierdzenie 3.5.** *Jeżeli  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , to  $(\widehat{\check{g}}) = g$ .*

Dowód można znaleźć w książkach Steina i Weissa [11] oraz Yosidy [15].

**Definicja 3.6.** Niech  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . *Splotem funkcji  $f$  i  $g$  nazywamy funkcję zdefiniowaną wzorem*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy.$$

Proponuję samodzielnie sprawdzić następujące własności splotu.

- $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,
- $\widehat{(f * g)} = (2\pi)^{-n/2} \widehat{f} \widehat{g}$ ,
- $(2\pi)^{-n/2} \widehat{(fg)} = \widehat{f} * \widehat{g}$ .

Zatem transformata Fouriera zamienia splot na mnożenie a mnożenie na splot.

**3.2. Konstrukcja rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego.** Załóżmy, że  $u = u(x, t)$  jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$(3.3) \quad u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

$$(3.4) \quad u(x, 0) = g(x),$$

z warunkiem początkowym  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Nie wiemy czy funkcja  $u$  jest dostatecznie regularna aby istniała jej transformata Fouriera, dlatego poniższe rachunki nie są do końca uzasadnione. Później zajmiemy się tym problemem.

Na równanie (3.3) nakładamy obustronnie transformatę Fouriera względem  $x$ . Ponieważ

$$\widehat{u}_t(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u_t(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\xi, t)$$

oraz

$$\widehat{\Delta u}(\xi, t) = \sum_{j=1}^n (i\xi_j)^2 \widehat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t),$$

zatem po przetransformowaniu równanie ciepła (3.3) przybiera postać

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

Ustalamy teraz  $\xi$  i rozwiązujemy powyższe równanie różniczkowe *zwyczajne* (różniczkowanie jest względem  $t$ ). Rozwiązaniem jest  $\widehat{u}(\xi, t) = C e^{-t|\xi|^2}$ , gdzie „stałą”  $C = C(\xi)$  wyznaczamy z warunku początkowego  $C = \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi)$ . Zatem  $\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{g}(\xi) e^{-t|\xi|^2}$  i rozwiązanie znajdujemy obliczając transformatę odwrotną

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \widehat{g}(\xi) e^{-t|\xi|^2} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2} g(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2} d\xi \right) g(y) dy. \end{aligned}$$

Pozostaje do obliczenia całka

$$(3.5) \quad G(x-y, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2} d\xi.$$

Zauważmy, że funkcja podcałkowa należy do  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Podstawiając

$$\xi = \frac{i(x-y)}{2t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\eta,$$

otrzymujemy

$$d\xi = t^{-n/2} d\eta \quad \text{oraz} \quad i(x-y)\xi - t|\xi|^2 = \frac{-|x-y|^2}{4t} - |\eta|^2.$$

Zatem

$$G(x-y, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} e^{-|\eta|^2} t^{-n/2} d\eta = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/(4t)},$$

ponieważ  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = \pi^{n/2}$ .

**Definicja 3.7.** Funkcja

$$G(x-y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$$

nazywa się *jądrem Gaussa–Weierstrassa*, *jądrem ciepła* lub *jądrem gaussowskim*.

Udowodnimy teraz kilka ważnych własności jądra  $G(x-y, t)$ .

**Lemat 3.8.**

- (a)  $G(z, t) = t^{-n/2}G(z/\sqrt{t}, 1)$ ,
- (b)  $G(x - y, t) \in C^\infty$  dla  $x, y \in \mathbb{R}^n$  i  $t > 0$ ,
- (c)  $G_t - \Delta_x G = 0$  dla  $t > 0$ ,
- (d)  $G(x - y, t) > 0$ ,
- (e)  $\int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) dy = 1$ ,
- (f) dla każdego  $\delta > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\delta} G(x - y, t) dy = 0$$

jednostajnie względem  $x$ .

*Dowód.* Własność (a) wynika natychmiast z postaci jądra  $G$ . (b) oraz (c) to proste ćwiczenie z rachunku różniczkowego. (d) jest oczywiste. Podstawiając  $y = x + (4t)^{1/2}z$  otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) dy = \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \pi^{-n/2} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds \right)^n = 1,$$

a więc (v) jest udowodnione. Aby otrzymać (d), podstawienie  $y = x + (4t)^{1/2}z$  prowadzi do równości

$$\int_{|y-x|>\delta} G(x - y, t) dy = \pi^{-n/2} \int_{|z|>\delta/\sqrt{4t}} e^{-|z|^2} dz,$$

gdzie prawa strona dąży jednostajnie do zera gdy  $t \rightarrow 0$ .  $\square$

Teraz możemy uściślić rozumowanie podane na początku tego rozdziału, gdzie wyprowadzone zostało rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego.

**Twierdzenie 3.9.** *Załóżmy, że funkcja  $g = g(x)$  jest ciągła i ograniczona na  $\mathbb{R}^n$ . Wówczas funkcja*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t)g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right)g(y) dy$$

- (a) jest klasy  $C^\infty$  dla  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $t > 0$ ,
- (b) spełnia równanie  $u_t = \Delta u$  dla  $t > 0$ ,
- (c) może być rozszerzona do funkcji ciągłej na  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  tak, aby  $u(x, 0) = g(x)$ .

*Dowód.* Z własności jądra ciepła zebranych w Lemacie 3.8 natychmiast wynika, że  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ . Dodatkowo, różniczkując pod znakiem całki wyrażenie definiujące  $u = u(x, t)$  otrzymujemy, że spełnia ono równanie ciepła. Aby udowodnić punkt (c), należy wykazać, że

$$u(x, t) \rightarrow g(x_0), \quad \text{gdy } x \rightarrow x_0 \text{ i } t \rightarrow 0.$$



Ustalamy  $\varepsilon > 0$  i znajdujemy  $\delta > 0$  takie, że

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{dla } |y - x_0| < 2\delta$$

(wykorzystujemy tutaj ciągłość funkcji  $g$ ). Niech  $M = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)|$ . Dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}^n$  spełniających  $|x - x_0| < \delta$ , na mocy Lematu 3.8 punkt (f), prawdziwe są oszacowania

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) [g(y) - g(x_0)] dy \right| \\ &\leq \left( \int_{|y-x| \leq \delta} + \int_{|y-x| > \delta} \right) G(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &\leq \int_{|y-x| \leq \delta} G(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &\quad + 2M \int_{|y-x| > \delta} G(x - y, t) dy \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) dy + 2M \int_{|y-x| > \delta} G(x - y, t) dy \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

dla dostatecznie małych  $t$ . □

**Uwaga.** Takie samo rozumowanie prowadzi do analogicznego twierdzenia przy założeniu, że funkcja  $g = g(x)$  jest mierzalna i spełnia nierówność

$$|g(x)| \leq M e^{a|x|^2} \quad \text{dla pewnych stałych } M, a > 0.$$

Otrzymujemy wtedy rozwiązanie równania ciepła  $u_t = \Delta u$  klasy  $C^\infty$  dla  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $0 < t < 1/(4a)$ . Dodatkowo,  $u(x, t) \rightarrow g(x_0)$  gdy  $x \rightarrow x_0$  i  $t \rightarrow 0$  w każdym punkcie ciągłości  $x_0$  funkcji  $g(x)$ .

Gotowi jesteśmy teraz udowodnić podstawowe twierdzenie tego rozdziału.

**Twierdzenie 3.10.** *Dla każdego warunku początkowego  $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  zagadnienie Cauchy'ego*

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

jest dobrze postawione w sensie Hadamarda w przestrzeni

$$(3.6) \quad \mathcal{X} = C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T]).$$

*Dowód.* Istnienie rozwiązań zostało już udowodnione w poprzednim twierdzeniu. Przypomnijmy, że rozwiązanie otrzymuje się jako spłot warunku początkowego  $g(x)$  z jądrem Gaussa–Weierstrassa  $G = G(x, t)$ . Nie wykazaliśmy tylko, że  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ , ale to łatwo wynika z własności jądra  $G(x, t)$

$$|u(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) |g(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) dy \|g\|_\infty = \|g\|_\infty.$$

*Jednoznaczność i stabilność rozwiązań* jest konsekwencją następującej wersji zasady maksimum dla *ograniczonych rozwiązań*.

**Twierdzenie 3.11.** *Niech przestrzeń  $\mathcal{X}$  będzie zdefiniowana równością (3.6). Jeżeli  $u \in \mathcal{X}$  spełnia równanie ciepła  $u_t = \Delta u$ , to*

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]} u(x,t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0).$$

*Szkic dowodu.* Tutaj  $\Omega = \mathbb{R}^n$  jest obszarem nieograniczonym, więc nie możemy zastosować bezpośrednio wcześniej udowodnionej zasady maksimum. Niech  $m = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0)$ . Ponieważ  $u(x,t)$  jest ciągła, więc wystarczy udowodnić, że  $u(x,t) \leq m$ . Ustalamy  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  i definiujemy

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(2nt + |x - x_0|^2).$$

Najpierw dowodzimy, że  $v(x,t) \leq m$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $\varepsilon > 0$ . Później przechodzimy do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$  i otrzymujemy  $u(x_0,t) \leq m$ .  $\square$

**Zadanie 3.12.** Uzupełnij szczegóły tego dowodu. Pamiętaj, że  $u(x,t)$  jest ograniczona, więc  $v(x,t)$  może być nieujemna tylko na ograniczonym podzbiore zbioru  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

Aby dokończyć dowód Twierdzenia 3.10 (tzn. pokazać jednoznaczność i stabilność rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła) wystarczy przypomnieć odpowiednie dowody przeprowadzone dla obszaru ograniczonego.  $\square$

**Wniosek 3.14.** *Każde ograniczone rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła ma postać splotu warunku początkowego z jądrem Gaussa-Weierstrassa.*

**Przykład.** Różniczkując, natychmiast sprawdzamy, że funkcja

$$u(x,t) = 2nt + |x|^2 = 2nt + x_1^2 + \dots + x_n^2$$

jest rozwiązaniem równania ciepła z warunkiem początkowym  $u(x,0) = |x|^2$ . Na podstawie uwagi sformułowanej po Twierdzeniu 3.9, wiemy też, że  $G(\cdot, t) * |\cdot|^2$  jest również rozwiązaniem. Odpowiedź na pytanie, czy

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(x-y, t) |y|^2 dy = 2nt + |x|^2$$

będzie można znaleźć poniżej, w Twierdzeniu 3.15.

**Przykład.** Funkcja Tichonowa

$$u_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \frac{d^k}{dt^k} e^{-1/t^2}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Dowód zbieżności szeregu definiującego  $u_1$  można znaleźć w książce Johna [8, Rozdział 7]. Oczywiście innym rozwiązaniem jest  $u_2(x, t) \equiv 0$ . Ten brak jednoznaczności rozwiązań wyjaśniamy poniżej.

Udowodnimy teraz kolejną zasadę maksimum dla rozwiązań równania ciepła z nieograniczonymi warunkami początkowymi.

**Twierdzenie 3.15.** *Załóżmy, że  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, t])$  jest rozwiązaniem zagadnienia (3.3)–(3.4) spełniającym dodatkowe oszacowanie*

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}$$

dla pewnych stałych  $a, A > 0$  oraz wszystkich  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $0 \leq t \leq T$ . Wówczas

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Pomijam tutaj niezbyt trudny dowód tego twierdzenia ponieważ można go znaleźć w niedawno wydanym tłumaczeniu książki Evansa [6].

**Wniosek 3.16.** *Niech  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  spełnia oszacowanie  $|g(x)| \leq Ae^{a|x|^2}$  dla pewnych stałych  $A, a > 0$  i wszystkich  $x \in \mathbb{R}^n$ . Zagadnienie początkowe*

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, 1/(4a)))$  w klasie funkcji spełniających oszacowanie

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}$$

dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq t < 1/(4a)$  i stałych  $A, a > 0$ .

Wróćmy do przykładów rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła. Przy warunku początkowym  $g \equiv 0$  zagadnienie to ma, oprócz rozwiązania trywialnego  $u \equiv 0$ , nieskończenie wiele innych rozwiązań. Jednym z nich jest funkcja Tichonowa; inne przykłady można znaleźć w książce Johna [8, Rozdział 7]. Na mocy Twierdzenia 3.15, każde z tych rozwiązań, oprócz  $u \equiv 0$ , musi rosnąć bardzo szybko gdy  $|x| \rightarrow \infty$ . Rozwiązanie  $u \equiv 0$  zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym  $g \equiv 0$  nazywa się często *rozwiązaniem fizycznym*, inne – rozwiązaniami *niefizycznymi*.

Ważny *fizycznie* wynik uzyskał Widder, który zajmował się tylko nieujemnymi rozwiązaniami równania ciepła (temperatura jest wtedy mierzona w stopniach Kelvina).

**Twierdzenie 3.17** (Widder). *Załóżmy, że  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, T])$  jest niewyjmnym rozwiązaniem zagadnienia*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

*Wówczas  $u(x, t)$  jest jedynym rozwiązaniem. Dodatkowo,  $u(x, t)$  wyraża się znany wzorem*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t)g(y) dy.$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w książce Johna [8, Rozdział 7]. Zainteresowanego czytelnika odsyłam również do książek DiBenedetto [4] i Evansa [6], gdzie podane są uogólnienia tego twierdzenia.

#### 4. Kilka uwag o przestrzeniach $L^p$

Dla każdego  $1 \leq p < \infty$  definiujemy przestrzeń funkcyjną

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} : f \text{ - mierzalna, } \|f\|_p \equiv \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

oraz

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} : f \text{ - mierzalna, } \|f\|_\infty \equiv \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty\}.$$

Oto najważniejsze fakty dotyczące przestrzeni  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

- (1)  $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$  jest przestrzenią Banacha dla wszystkich  $1 \leq p \leq \infty$ .
- (2) Prawdziwa jest nierówność Höldera: dla wszystkich  $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  oraz  $p, q \in [1, \infty]$  spełniających  $1/p + 1/q = 1$  zachodzi nierówność

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

- (3)  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ ; przy tym, zanurzenie to jest gęste dla każdego  $1 \leq p < \infty$ . Łatwo tutaj zauważyć, że funkcji stałych (należących do  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ) nie można przybliżać w normie przestrzeni  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  funkcjami o nośnikach zwartych.

Następujący lemat mówi, że operator przesunięcia  $\nu_x$  jest ciągły na przestrzeniach  $L^p(\mathbb{R}^n)$  dla  $p \neq \infty$ .

**Lemat 4.1.** *Dla funkcji  $f$  określonej na  $\mathbb{R}^n$  i  $x \in \mathbb{R}^n$  definiujemy*

$$\nu_x f(y) = f(x + y).$$

*Dla każdego  $1 \leq p < \infty$  i  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  zachodzi relacja*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|\nu_x f - f\|_p = 0.$$

*Dowód.* Niech  $g$  będzie funkcją ciągłą o zwartym nośniku. Dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}^n$  takich, że  $|x| \leq 1$ , nośniki funkcji  $\nu_x g$  są zawarte we wspólnym zbiorze ograniczonym. Zatem z jednostajnej ciągłości funkcji  $g$  wynika natychmiast, że

$$\|\nu_x g - g\|_p \rightarrow 0 \quad \text{gdy } x \rightarrow 0.$$

Ustalamy teraz  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  i  $\varepsilon > 0$ . Wybieramy  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tak, aby  $\|f - g\| < \varepsilon/3$ . Wtedy

$$\|\nu_x f - f\|_p \leq \|\nu_x f - \nu_x g\|_p + \|\nu_x g - g\|_p + \|g - f\|_p.$$

Następnie ustalamy  $|x|$  tak małe, aby  $\|\nu_x g - g\|_p < \varepsilon/3$  i wtedy

$$\|\nu_x f - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square$$

### 5 Zagadnienie Cauchy'ego w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$

**Twierdzenie 5.1.** *Załóżmy, że  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Wówczas zagadnienie*

$$(5.1) \quad u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

$$(5.2) \quad u(x, 0) = g(x),$$

*ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze*

$$\mathcal{X} = C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^n)).$$

*Zatem warunek początkowy (co wynika z postaci przestrzeni  $\mathcal{X}$ ) jest tutaj przybierany w sensie normy przestrzeni  $L^1(\mathbb{R}^n)$ :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(\cdot, t) - g(\cdot)\|_1 = 0.$$

**Uwaga.** Rozwiązanie zagadnienia początkowego traktujemy tutaj jako ciągle odwzorowanie  $u: [0, \infty) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ .

*Dowód Twierdzenia 5.1. Istnienie.* Rozwiązanie  $u(x, t)$  dane jest znanym wzorem

$$(5.3) \quad u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) g(y) dy.$$

Łatwo jest sprawdzić, że  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ , jeżeli warunek początkowy spełnia  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Taki sam wynik otrzymujemy dla dowolnego  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , aproksymując  $g$  funkcjami gładkimi o nośnikach zwartych, a następnie korzystając z nierówności (5.8).

Pozostało jeszcze do udowodnienia, że rozwiązanie dane wzorem (5.3) należy do przestrzeni  $C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^n))$ . Z twierdzenia Fubiniiego wynika

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y, t)g(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y, t)|g(y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y, t) dx |g(y)| dy = \|g\|_1, \end{aligned}$$

a więc  $u \in L^\infty([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^n))$  i prawdziwe jest oszacowanie

$$\|u(\cdot, t)\|_1 \leq \|g\|_1.$$

Przypomnijmy, że kolejne zamiany zmiennych, najpierw  $y = x - z$ , a następnie  $w = z/\sqrt{t}$ , prowadzą do równości

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y, t)g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n/2}G(z/\sqrt{t}, 1)g(x-z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} G(w, 1)g(x - \sqrt{t}w) dw. \end{aligned}$$

Ponieważ,  $\int_{\mathbb{R}^n} G(w, 1) dw = 1$ , więc

$$u(x, t) - g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(w, 1)[g(x - \sqrt{t}w) - g(x)] dw.$$

Obliczamy teraz normę  $L^1(\mathbb{R}^n)$ :

$$(5.4) \quad \|u(\cdot, t) - g(\cdot)\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} G(w, 1)\|g(\cdot - \sqrt{t}w) - g(\cdot)\|_1 dw.$$

Całkę potraktowano tutaj jako granicę sum częściowych i zastosowano nierówność trójkąta dla normy  $\|\cdot\|_1$ . Zauważmy teraz, że  $\|g(\cdot - \sqrt{t}w) - g(\cdot)\|_1 \leq 2\|g\|_1$  oraz

$$\|g(\cdot - \sqrt{t}w) - g(\cdot)\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{gdy } t \rightarrow 0,$$

gdyż operacja przesunięcia jest ciągła na  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Zatem, z Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, prawa strona w nierówności (5.4) dąży do zera.

Dowód faktu, że  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_0)\|_1 = 0$  dla każdego  $t_0 > 0$  jest analogiczny i dlatego pomijamy go.

*Jednoznaczność rozwiązań.* Potrzebna nam jest tutaj wersja zasady maksimum, gdy warunki początkowe są w  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Udowodnimy ją stosując, tzw. „metodę obcinania” Stampacchii.  $\square$

**Twierdzenie 5.2.** *Niech  $u$  będzie rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła z warunkiem początkowym  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dla każdego punktu  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  zachodzą nierówności:*

$$(5.5) \quad \min\{0, \inf_{\mathbb{R}^n} g\} \leq u(x, t) \leq \max\{0, \sup_{\mathbb{R}^n} g\}.$$

*Dowód.* Wprowadźmy oznaczenie  $K = \max\{0, \sup_{\mathbb{R}^n} g\}$  i załóżmy, że  $K < \infty$ . Definiujemy „funkcję obcinającą”  $a \in C^1(\mathbb{R})$  o następujących własnościach:

- (a)  $|a'(s)| \leq M$  dla pewnej stałej  $M > 0$ ;
- (b) funkcja  $a$  jest ściśle rosnąca na  $(0, +\infty)$ ;
- (c) dla każdego  $s \leq 0$ ,  $a(s) = 0$ .

Można powiedzieć, że  $a = a(s)$  to „wygładzona” funkcja  $y(x) = x$  dla  $x \geq 0$  oraz  $y(x) = 0$  dla  $x < 0$ .

Zdefiniujmy funkcję pierwotną  $A(s) = \int_0^s a(\tau) d\tau$ . Łatwo zauważyć, wykorzystując własności  $a = a(s)$ , że funkcja  $A(s)$  jest ściśle dodatnia dla  $s > 0$  i tożsamościowo równa zero dla  $s \leq 0$ .

Kładąc  $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} A(u(x, t) - K) dx$ , natychmiast sprawdzamy, że  $\varphi(0) = 0$  i  $\varphi \geq 0$  na  $[0, \infty)$ . Obliczmy pochodną tej funkcji:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} a(u(x, t) - K) u_t(x, t) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a(u(x, t) - K) \Delta u(x, t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} a'(u(x, t) - K) |\nabla u(x, t)|^2 dx \leq 0, \quad \text{gdyż } a' \geq 0. \end{aligned}$$

Zatem  $\varphi' \leq 0$  co implikuje, że  $\varphi \equiv 0$ . Wynika stąd, że  $A(u(x, t) - K) = 0$  prawie wszędzie, a więc z własności funkcji  $A$  otrzymujemy

$$u(x, t) \leq K = \max\{0, \sup_{\mathbb{R}^n} g\}$$

z dokładnością do zbioru miary zero.

Powyższa zasada maksimum natychmiast implikuje jednoznaczność rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego (5.1)–(5.2), i to kończy dowód Twierdzenia 5.1.  $\square$

**Uwaga.** Dowód zasady maksimum sformułowany w Twierdzeniu 5.2 wymaga, aby

$$(5.6) \quad u \in C^1((0, \infty), L^2(\mathbb{R}^n)) \quad \text{oraz} \quad \nabla u \in C((0, \infty), L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Problem ten można ominąć, uzupełniając przestrzeń  $\mathcal{X}$  o te dwa warunki lub udowodnić, że każde rozwiązanie zagadnienie (5.1)–(5.2) spełnia (5.6).

### 5.1. Stabilność rozwiązań w $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Twierdzenie 5.3.** *Załóżmy, że  $u = u(x, t)$  jest rozwiązaniem zagadnienia (5.1)–(5.2) z warunkiem początkowym  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Wtedy*

$$(5.7) \quad \|u(\cdot, t)\|_1 \leq \|g\|_1 \quad \text{dla każdego } t > 0.$$

Podane zostaną dwa różne dowody tego twierdzenia

*Dowód 1.* Wiemy już, że

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t)g(y) dy.$$

Obliczamy normę  $\|\cdot\|_1$ , stosujemy nierówność trójkąta dla całek i korzystamy z równości  $\|G(\cdot - y, t)\|_1 = 1$  aby otrzymać

$$\|u(\cdot, t)\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|G(\cdot - y, t)\|_1 |g(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy = \|g\|_1. \quad \square$$

*Dowód 2.* Załóżmy, że nie wiemy, że funkcja  $u(x, t)$  jest dana jako splot warunku początkowego  $g$  z jądrem  $G$ . Podana metoda dowodzenia stabilności w  $L^1(\mathbb{R}^n)$  podobna jest do „metody obcinania” Stampacchii i ma zastosowanie w badaniu różnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych.

Definiujemy ciąg funkcji  $a_n \in C^1(\mathbb{R})$ , ściśle rosnących na  $\mathbb{R}$ ,  $a_n(0) = 0$ ,  $a_n(s) > 0$  dla  $s > 0$  i  $a_n(s) < 0$  dla  $s < 0$ . Dodatkowo żądamy, aby nieujemne funkcje

$$A_n(s) = \int_0^s a_n(\tau) d\tau$$

były zbieżne jednostajnie do funkcji  $y(x) = |x|$ . Tak więc ciąg  $a_n = a_n(x)$  przybliża funkcję  $\text{sgn}(x) = 1$  dla  $x > 0$ ,  $\text{sgn}(x) = 0$  dla  $x = 0$ ,  $\text{sgn}(x) = -1$  dla  $x < 0$ .

Mnożymy równanie  $u_t = \Delta u$  przez  $a_n(u(x, t))$  i całkujemy względem  $x$ . Proste rachunki powadzą do tożsamości

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} a_n(u(x, t))u_t(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} A_n(u(x, t)) dx, \\ \int_{\mathbb{R}^n} a_n(u(x, t))\Delta u(x, t) dx &= - \int_{\mathbb{R}^n} a_n'(u(x, t))|\nabla u(x, t)|^2 dx \leq 0, \end{aligned}$$

ponieważ  $a_n' \geq 0$ . Zatem  $(d/dt) \int_{\mathbb{R}^n} A_n(u(x, t)) dx \leq 0$ , a po scałkowaniu

$$\int_{\mathbb{R}^n} A_n(u(x, t)) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} A_n(g(x)) dx.$$

Obliczamy teraz granicę  $n \rightarrow \infty$  i otrzymujemy (5.7). □

**Uwaga.** Stosując powyższe twierdzenie do różnicy dwóch rozwiązań natychmiast otrzymujemy nierówność

$$(5.8) \quad \|u_1(\cdot, t) - u_2(\cdot, t)\|_1 \leq \|g_1 - g_2\|_1$$



gwarantującą, że mała zmiana w  $L^1(\mathbb{R}^n)$  warunków początkowych prowadzi do małych zmian rozwiązania.

**Uwaga.** Wiemy, że zanurzenie  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$  jest gęste. Znaczna część wyników dotycząca zagadnienia początkowego dla równania ciepła może być najpierw dowiedziona dla warunków początkowych  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , a następnie rozszerzona na dowolne warunki początkowe  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  przez ich aproksymacje funkcjami z  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  i wykorzystanie nierówności (5.8).

### 6. Asymptotyka rozwiązań gdy $t \rightarrow \infty$

W rozdziale tym zakładamy, że  $u = u(x, t)$  jest rozwiązaniem zagadnienia

$$(6.1) \quad u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

$$(6.2) \quad u(x, 0) = g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

danym wzorem

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t)g(y) dy.$$

*Oszacowanie normy  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .* Wiemy, że  $G(x - y, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|x - y|^2/(4t))$ , zatem  $|G(x - y, t)| \leq (4\pi t)^{-n/2}$ . Stąd wynika oszacowanie

$$(6.3) \quad |u(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |G(x - y, t)|g(y) dy \leq (4\pi t)^{-n/2} \|g\|_1.$$

Zatem  $\|u(\cdot, t)\|_\infty$  dąży do zera gdy  $t \rightarrow \infty$  tak jak  $t^{-n/2}$ .

*Oszacowanie normy  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .* Wiemy, że  $\|u(\cdot, t)\|_1 \leq \|g\|_1$ . Ale łatwo zauważyć, że istnieją warunki początkowe, dla których  $\|u(\cdot, t)\|_1$  nie dąży do zera gdy  $t \rightarrow \infty$ . Wystarczy wziąć  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  taką, że  $g \geq 0$ . Wtedy  $u(x, t) \geq 0$ , co prowadzi do równości

$$\|u(\cdot, t)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t)g(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t) dx g(y) dy = \|g\|_1.$$

Poniżej, w uwagach po Twierdzeniu 6.1 wyjaśnimy, że  $\|u(\cdot, t)\|_1 \rightarrow 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx = 0$ .

*Oszacowanie normy  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .* Dla dowolnego  $1 < p < \infty$  stosujemy definicję normy  $L^p$  i oszacowania (5.7) oraz (6.3) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_p &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \|u(\cdot, t)\|_\infty^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)| dx \right)^{1/p} \\ &= \|u(\cdot, t)\|_\infty^{1-1/p} \|u(\cdot, t)\|_1^{1/p} \leq (4\pi t)^{-(n/2)(1-1/p)} \|g\|_1. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy tutaj podstawowe oszacowanie normy  $L^p(\mathbb{R}^n)$  rozwiązań zagadnienia (6.1)–(6.2):

$$(6.4) \quad \|u(\cdot, t)\|_p \leq (4\pi t)^{-(n/2)(1-1/p)} \|g\|_1$$

dla dowolnego  $t > 0$  i wszystkich  $p \in [1, \infty]$ .

**6.1 Rozwinięcie asymptotyczne rozwiązań.** Dla każdej funkcji  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  prawdziwy jest następujący prosty wzór

$$(6.5) \quad h(x) - h(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} h(tx) dt = \int_0^1 x \cdot \nabla h(tx) dt.$$

Równość (6.5) jest pewną wersją rozwinięcia Taylora funkcji  $h$ .

Zastosujmy powyższy wzór do funkcji  $h(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ , a następnie otrzymaną tożsamość pomnożmy przez  $e^{-t|\xi|^2}$ :

$$(6.6) \quad e^{-t|\xi|^2} \widehat{g}(\xi) - e^{-t|\xi|^2} \widehat{g}(0) = e^{-t|\xi|^2} \xi \cdot \int_0^1 (\nabla \widehat{g})(t\xi) dt.$$

Zauważmy, że

$$\widehat{g}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot 0} g(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} M,$$

gdzie  $M = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$ . Z definicji jądra  $G(x, t)$  (por. (3.5)) otrzymujemy

$$(e^{-t|\xi|^2} \widehat{g}(0))^\vee(x) = MG(x, t).$$

Ponadto, następujące tożsamości wynikają z własności transformaty Fouriera oraz z (3.5):

$$\begin{aligned} (e^{-t|\xi|^2} \widehat{g}(\xi))^\vee(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y, t) g(y) dy = u(x, t), \\ (\xi e^{-t|\xi|^2})^\vee(x) &= \frac{1}{i} \nabla G(x, t), \\ (\nabla \widehat{g}(\xi))^\vee &= ixg(x). \end{aligned}$$

Zatem obliczenie odwrotnej transformaty Fouriera ze wzoru (6.6) prowadzi do równości

$$(6.7) \quad u(x, t) - MG(x, t) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla G)(x-y, t) \cdot tyg(ty) dy dt.$$

Możemy teraz udowodnić jedno z najważniejszych twierdzeń dotyczących asymptotyki rozwiązań równania ciepła na  $\mathbb{R}^n$ .

**Twierdzenie 6.1.** *Niech  $u = u(x, t)$  będzie rozwiązaniem zagadnienia (6.1)–(6.2) z warunkiem początkowym spełniającym  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  oraz  $xg(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Oznaczmy  $M = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$ . Dla każdego  $p \in [1, \infty]$  istnieje stała  $C = C(p)$  taka, że dla wszystkich  $t > 0$*

$$(6.8) \quad \|u(\cdot, t) - MG(\cdot, t)\|_p \leq Ct^{-(n/2)(1-1/p)-1/2} \|xg(x)\|_1.$$

*Dowód.* Wystarczy obliczyć normę  $L^p(\mathbb{R}^n)$  wyrażenia (6.7) i oszacować normę występującego tam splotu. Zauważmy, że

$$\|\nabla G(\cdot, t)\|_p = t^{-(n/2)(1-1/p)-1/2} \|\nabla G(\cdot, 1)\|_p = Ct^{-(n/2)(1-1/p)-1/2}$$

i dlatego

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla G)(\cdot - y, t) \cdot tyg(ty) dy dt \right\|_p \\ & \leq \|\nabla G(\cdot, t)\|_p \left\| \int_0^1 tyg(ty) dt \right\|_1 \leq Ct^{-(n/2)(1-1/p)-1/2} \|xg(x)\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

**Uwaga.** Bezpośredni rachunek oparty na zamianie zmiennych prowadzi do równości

$$\|G(\cdot, t)\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^n} (t^{-n/2} G(x/\sqrt{t}, 1))^p dx \right)^{1/p} = t^{-(n/2)(1-1/p)} \|G(\cdot, 1)\|_p,$$

podczas gdy Twierdzenie 6.1 mówi, że norma  $L^p$  różnicy  $u(x, t) - MG(x, t)$  dąży do zera szybciej – tak jak  $t^{-(n/2)(1-1/p)-1/2}$ . Oznacza to, że dla  $t \rightarrow \infty$  rozwiązanie  $u = u(x, t)$  zaczyna coraz bardziej przypominać jądro Gaussa–Weierstrassa  $G = G(x, t)$ .

**Uwaga.** Jeżeli  $g$  spełnia założenia Twierdzenia 6.1 oraz dodatkowo  $M = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 0$ , to

$$\|u(\cdot, t)\|_1 \leq Ct^{-1/2} \rightarrow 0 \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty.$$

Porównaj ten fakt z uwagą dotyczącą braku malenia normy  $L^1(\mathbb{R}^n)$  sformułowaną na początku tego rozdziału.

**Uwaga.** Wiemy już, że zazwyczaj  $\|u(\cdot, t)\|_1$  nie dąży do zera gdy  $t \rightarrow \infty$ . To samo możemy wywnioskować z Twierdzenia 6.1 o ile  $M \neq 0$ . Wynika to z nierówności

$$\| \|u(\cdot, t)\|_1 - \|MG(\cdot, t)\|_1 \| \leq \|u(\cdot, t) - MG(\cdot, t)\|_1 \leq Ct^{-1/2}.$$

Ponieważ  $\|MG(\cdot, t)\|_1 = |M| \|G(\cdot, t)\|_1 = |M|$ , więc

$$\|u(\cdot, t)\|_1 \rightarrow |M| \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty.$$

**Uwaga.** Twierdzenie 6.1 można uogólnić na dowolne warunki początkowe  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Jeżeli nie założymy, że  $xg(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , to otrzymamy słabszą zbieżność do zera normy  $L^p$

$$(6.9) \quad t^{(n/2)(1-1/p)} \|u(\cdot, t) - MG(\cdot, t)\|_p \rightarrow 0 \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty.$$

Aby to udowodnić, wystarczy aproksymować  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  funkcjami  $g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tak, aby  $\int_{\mathbb{R}^n} g_n(x) dx = M$  oraz

$$\|g_n(\cdot) - g(\cdot)\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \|xg_n(x) - xg(x)\|_1 \rightarrow 0,$$

gdy  $n \rightarrow \infty$ . Następnie należy zastosować nierówność (5.8).

**Uwaga.** Asymptotyczny wynik zawarty w (6.9) można zinterpretować jeszcze w inny sposób. Zdefiniujmy dla każdego  $\lambda > 0$  przeskalowane rozwiązanie

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^n u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Zastosujmy niezmienniczość jądra  $G(x, t)$  na to skalowanie

$$G_\lambda(x, t) = \lambda^n G(\lambda x, \lambda^2 t) = \frac{\lambda^n}{(4\pi\lambda^2 t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4\lambda^2 t)} = G(x, t).$$

Dlatego ustalając  $t = t_0 > 0$  i robiąc prostą zamianę zmiennych w całkach definiujących normy  $L^p$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|u_\lambda(\cdot, t_0) - MG(\cdot, t_0)\|_p &= \|\lambda^n G(\lambda \cdot, \lambda^2 t_0) - \lambda^n MG(\lambda \cdot, \lambda^2 t_0)\|_p \\ &= \lambda^{n-n/p} \|u(\cdot, \lambda^2 t_0) - MG(\cdot, \lambda^2 t_0)\|_p \\ &= t_0^{-(n/2)(1-1/p)} t_0^{(n/2)(1-1/p)} \|u(\cdot, t) - MG(\cdot, t)\|_p \end{aligned}$$

po podstawieniu  $\lambda = \sqrt{t/t_0}$ . Ponieważ  $\lambda \rightarrow \infty$  wtedy i tylko wtedy gdy  $t \rightarrow \infty$ , więc wynik zawarty w (6.9) jest równoważny następującemu faktowi

$$(6.10) \quad \forall t_0 > 0 \quad \forall p \in [1, \infty] \quad u_\lambda(\cdot, t_0) \rightarrow MG(\cdot, t_0) \quad \text{w przestrzeni } L^p(\mathbb{R}^n)$$

gdy  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Uwaga.** Więcej informacji na temat asymptotycznych rozwinięć rozwiązań równania ciepła można znaleźć w pracy Duoandikoetxea i Zuazua [5].

## 7. Równanie Fokkera–Plancka

Aby uprościć rachunki ograniczmy się w tym rozdziale do zagadnienia jednowymiarowego mimo, że wszystkie prezentowane wyniki są prawdziwe w  $\mathbb{R}^n$ .

Niech  $u = u(x, t)$  będzie rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla jednowymiarowego równania ciepła

$$(7.1) \quad u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$(7.2) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Definiujemy nową funkcję

$$(7.3) \quad v(x, t) = e^t u(xe^t, 2(e^{2t} - 1)).$$

**Twierdzenie 7.1.** *Jeżeli  $u = u(x, t)$  jest rozwiązaniem zagadnienia (7.1)–(7.2), to funkcja  $v = v(x, t)$  dana wzorem (7.3) jest rozwiązaniem zagadnienia*

$$(7.4) \quad v_t = v_{xx} + (xv)_x,$$

$$(7.5) \quad v(x, 0) = v_0(x) = u_0(x).$$

*Dowód.* Bezpośredni rachunek. □

Równanie  $v_t = v_{xx} + (xv)_x$  jest najprostszym przykładem równania typu Fokkera–Plancka, które wykorzystywane jest m.in. w teorii równań stochastycznych. Celem kolejnych wykładów będzie zbadanie zachowania się jego rozwiązań, gdy  $t \rightarrow \infty$ . Zaczniemy od najprostszych uwag.

- Zagadnienie (7.4)–(7.5) ma dokładnie jedno rozwiązanie w przestrzeni  $\mathcal{X} = C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}))$ . Możemy otrzymać  $v$  stosując transformatę Fouriera lub też skorzystać z uwagi, że  $v$  otrzymuje się przeskalowując rozwiązania równania ciepła.
- Warunek  $v_0(x) \geq 0$  implikuje  $v(x, t) \geq 0$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  i  $t > 0$ . Można to udowodnić „metodą obcinania” Stampacchii lub znowu stosujemy odpowiedni wynik dla równania ciepła.
- Dla wszystkich  $t > 0$  zachodzi równość

$$\int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} v_0(x) dx.$$

Tak było dla równania ciepła. Możemy też otrzymać tę równość bezpośrednio z równania (7.4) całkując je względem  $x$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} v_t(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} (v_x + xv)_x dx = (v_x + xv)|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0,$$

przy założeniu, że  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (v_x(x, t) + xv(x, t)) = 0$ .

- Będziemy zakładać, że

$$\int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx = 1 \quad \text{dla każdego } t \geq 0.$$

Jeżeli tak nie jest, wystarczy podzielić równanie (7.4) przez

$$M = \int_{\mathbb{R}} v_0(x) dx.$$

**Uwaga.** W rozdziale tym będziemy zawsze zakładać, że

$$v_0 \in L^1(\mathbb{R}), \quad v_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} v_0(x) dx = 1,$$

co na podstawie powyższych uwag natychmiast implikuje

$$v(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}), \quad v(x, t) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx = 1$$

dla każdego  $t \geq 0$ . Założenie to jest zgodne z probabilistyczną interpretacją równania, gdyż w tym przypadku, dla każdego ustalonego  $t \geq 0$ , funkcja  $v = v(x, t)$  jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej.

**7.1. Rozwiązania stacjonarne.** Szukamy rozwiązań zagadnienia (7.4)–(7.5) niezależnych od  $t$ . Takie rozwiązania nazywamy *rozwiązaniami stacjonarnymi* lub *stanami stacjonarnymi*. W tym przypadku  $v_t = 0$  i równanie redukuje się do równania różniczkowego zwyczajnego

$$(v_x + xv)_x = 0.$$

Po jednokrotnym przecałkowaniu otrzymujemy  $v_x + xv = C$ , gdzie  $C$  jest dowolną stałą całkowania. Jeszcze raz całkujemy równoważne z nim równanie  $(ve^{x^2/2})_x = Ce^{x^2/2}$ , co daje

$$v(x) = v(0)e^{-x^2/2} + Ce^{-x^2/2} \int_0^x e^{s^2/2} ds.$$

Ponieważ wymagamy aby  $v \in L^1(\mathbb{R})$ , więc  $C = 0$ . Dodatkowo, chcemy aby  $\int_{\mathbb{R}} v(x) dx = 1$ , więc

$$1 = \int_{\mathbb{R}} v(x) dx = v(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}v(0).$$

Ostatecznie otrzymujemy dokładnie jeden stan stacjonarny

$$(7.6) \quad v_{\infty}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

spełniający warunek  $\int_{\mathbb{R}} v_{\infty} dx = 1$ .

**Twierdzenie 7.2.** Niech  $v = v(x, t)$  będzie rozwiązaniem zagadnienia (7.4)–(7.5) z warunkiem początkowym  $v_0$  spełniającym  $\int_{\mathbb{R}} v_{\infty}(x) dx = 1$ . Dla każdego  $p \in [1, \infty]$

$$(7.7) \quad \|v(\cdot, t) - v_{\infty}\|_p \rightarrow 0 \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty.$$

*Dowód.* Przypomnijmy, że  $v = v(x, t)$  powstało z rozwiązania równania ciepła  $u = u(x, t)$  zgodnie ze wzorem

$$v(x, t) = e^t u(xe^t, 2(e^{2t} - 1)).$$

W dalszej części dowodu zakładamy będziemy, że  $1 \leq p < \infty$ . Dowód dla  $p = \infty$  wymaga oczywistych modyfikacji.

Powyższy związek pomiędzy  $v$  i  $u$  oraz prosta zamiana zmiennych prowadzą do równości:

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, t) - v_{\infty}\|_p &= \left( \int_{\mathbb{R}} \left| v(x, t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= e^{t(1-1/p)} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| u(y, 2(e^{2t} - 1)) - \frac{1}{e^t \sqrt{2\pi}} e^{-y^2/(2e^{2t})} \right|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Podstawiamy teraz w powyższym wyrażeniu  $s = 2(e^{2t} - 1)$ . Wtedy  $e^{2t} = s/2 + 1$  oraz  $e^t = \sqrt{s/2 + 1}$ . Zauważmy, że w tych nowych zmiennych

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^t \sqrt{2\pi}} e^{-y^2/(2e^{2t})} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(s/2 + 1)}} \exp\left(\frac{-y^2}{2(s/2 + 1)}\right) \\ &= G(y, (s/2 + 1)/2) = G(y, s/4 + 1/2), \end{aligned}$$

gdzie, przypomnijmy, jądro Gaussa–Weierstrassa ma postać

$$G(y, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-y^2/(4t)}.$$

Wykazaliśmy więc, że

$$(7.8) \quad \|v(\cdot, t) - v_\infty\|_p = (s/2 + 1)^{(1/2)(1-1/p)} \|u(\cdot, s) - G(\cdot, s/4 + 1/2)\|_p.$$

Przypomnijmy podstawowy wynik dotyczący rozwiązań równania ciepła (zob. (6.9))

$$s^{(1/2)(1-1/p)} \|u(\cdot, s) - G(\cdot, s)\|_p \rightarrow 0 \quad \text{gdy } s \rightarrow \infty.$$

ponieważ teraz  $M = \int_{\mathbb{R}} u(y, s) dy = \int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx = 1$ .

Oczywiście  $t \rightarrow \infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $s \rightarrow \infty$ . Aby zakończyć dowód opierając się na równości (7.8), należy jeszcze wykazać, że

$$s^{(1/2)(1-1/p)} \|G(\cdot, s/4 + 1/2) - G(\cdot, s)\|_p \rightarrow 0 \quad \text{gdy } s \rightarrow \infty.$$

Wynika to również z postaci asymptotyki rozwiązań równania ciepła (6.9), ponieważ  $w(y, s) = G(y, s/4 + 1/2)$  jest rozwiązaniem zagadnienia

$$w_s = w_{yy}, \quad w(y, 0) = G(y, 1/2)$$

oraz  $\int_{\mathbb{R}} w(y, s) dy = 1$ . □

Istotnym mankamentem powyższego rozumowania jest to, że oparliśmy się na związku rozwiązań zagadnienia (7.4)–(7.5) z rozwiązaniami równania ciepła. Udowodnione tezy są prawdziwe w znacznie ogólniejszym przypadku, jednak dowody wymagają wielu zaawansowanych narzędzi matematycznych.

## 8. Metoda entropijna

Chciałbym przedstawić najnowsze metody badania asymptotyki rozwiązań równań typu Fokkera–Plancka na przykładzie równania (7.4). Opieram się tutaj na następujących pracach:

- G. Toscaniego [13], gdzie bada się asymptotykę rozwiązań równania ciepła  $u_t = \Delta u$  i wprowadza się tzw. *metodę kinetyczną* czasami zwaną też *metodą entropijną*.
- A. Arnolda *et al.* [1], gdzie uogólnia się pomysły Toscaniego na przypadek równania  $v_t = \nabla \cdot (D(x)\nabla v + v\nabla A(x))$ .
- J. A. Carrillo i G. Toscaniego [3], gdzie bada się asymptotykę nieliniowego równania  $v_t = \nabla \cdot (\nabla v^m + xv)$  stosując metody kinetyczne.

**8.1. Relatywna entropia.** Zaczniemy od podstawowych definicji.

**Definicja 8.1.** Mówimy, że funkcja  $\psi \in C([0, \infty)) \cap C^4((0, \infty))$  generuje relatywną entropię, jeżeli spełnia założenia

- (a)  $\psi(1) = 0$ ;
- (b)  $\psi'' \geq 0$  oraz  $\psi'' \not\equiv 0$  na  $(0, \infty)$ ;
- (c)  $(\psi''')^2 \leq \psi''\psi^{iv}/2$ .

**Definicja 8.2.** Dla dowolnych  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $f \geq 0$ ,  $g \geq 0$ , takich, że  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$  definiujemy relatywną entropię  $f$  względem  $g$  wzorem

$$\Sigma_{\psi}(f, g) = \Sigma(f, g) \equiv \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)g(x) dx.$$

**Uwaga.** Dowolna funkcja  $\psi$  generująca entropię jest wypukła, dlatego stosując nierówność Jensena, można wykazać, że  $\Sigma(f, g) \geq 0$ . Dowodzi się tego w następujący sposób

$$0 = \psi(1) = \psi\left(\int f dx\right) = \psi\left(\int \frac{f(x)}{g(x)}g(x) dx\right) \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \int \psi\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)g(x) dx.$$

**Uwaga.** Jeżeli funkcja  $\psi$  generuje relatywną entropię, to też generuje ją funkcja  $\tilde{\psi}(s) = \psi(s) - \psi'(1)(s - 1)$ . Dodatkowo, dla dowolnych  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , takich, że  $\int f = \int g = 1$ , zachodzi równość

$$\Sigma_{\tilde{\psi}}(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)g(x) dx - \psi'(1) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f}{g} - 1\right)g dx}_{=0} = \Sigma_{\psi}(f, g)$$

Dlatego zawsze możemy zakładać, że  $\psi'(1) = 0$ .

Podamy teraz najważniejsze przykłady funkcji generujących entropię. Najbardziej znane to (entropia fizyczna)

$$\psi(s) = s \log s \quad \text{oraz} \quad \psi(s) = s \log s - s + 1.$$

Z powyższej uwagi wynika, że obie funkcje generują tę samą relatywną entropię. Przykład ten uogólnia się następująco

$$\psi_1(s) = \alpha(s + \beta) \log\left(\frac{s + \beta}{1 + \beta}\right) - \alpha(s - 1) \quad \text{dla dowolnych } \alpha > 0, \beta \geq 0.$$

Dla  $1 < p < 2$  mamy

$$\psi_p(s) = \alpha[(s + \beta)^p - (1 + \beta)^p - p(1 + \beta)^{p-1}(s - 1)] \quad \text{dla dowolnych } \alpha > 0, \beta \geq 0,$$

a w szczególności  $\psi_p(s) = s^p - 1 - p(s - 1)$ . Dla  $p = 2$  funkcją generującą relatywną entropię jest

$$\psi_2(s) = \alpha(s - 1)^2 \quad \text{dla dowolnego } \alpha > 0.$$



Podstawowe twierdzenie mówi, że każda relatywna entropia rozwiązania względem rozwiązania stacjonarnego maleje w czasie.

**Twierdzenie 8.3.** *Niech  $v = v(x, t)$  będzie rozwiązaniem zagadnienia (7.4)–(7.5) z warunkiem początkowym  $v_0$  spełniającym  $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $v_0 \geq 0$ ,  $\int v_0 dx = 1$ . Przypomnijmy, że  $v_\infty$  oznacza rozwiązanie stacjonarne dane wzorem  $v_\infty(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ . Dla dowolnej funkcji  $\psi$  generującej entropię mamy*

$$\frac{d}{dt} \Sigma_\psi(v(\cdot, t), v_\infty) \leq 0.$$

*Dowód.* Zauważmy, że

$$v_t = (v_x + xv)_x = \left( v_\infty \left( \frac{v}{v_\infty} \right)_x \right)_x.$$

Wykorzystamy ten wzór obliczając pochodną względem  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma_\psi(v(t), v_\infty) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \psi \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) v_\infty dx = \int_{\mathbb{R}} \psi' \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) v_t(t) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi' \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) \left( v_\infty \left( \frac{v}{v_\infty} \right)_x \right)_x dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \psi'' \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) \left[ \left( \frac{v}{v_\infty} \right)_x \right]^2 v_\infty dx \leq 0, \end{aligned}$$

ponieważ  $\psi'' \geq 0$ . □

Udowodniliśmy więc, że funkcja  $\Sigma(t) = \Sigma_\psi(v(t), v_\infty)$  maleje gdy  $t$  rośnie. Ponieważ  $\Sigma \geq 0$ , więc istnieje granica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = c_* \geq 0$ . Celem kolejnego twierdzenia jest pokazanie, że  $c_* = 0$ .

**Twierdzenie 8.4.** *Przy założeniach Twierdzenia 8.3*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = 0.$$

*Dowód.* Aby maksymalnie uprościć dowód będziemy zakładać, że  $v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Można rozważać mniej regularne warunki początkowe, jednak w tym przypadku rozumowanie jest dużo bardziej skomplikowane.

Wiemy już, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = v_\infty(x)$  dla prawie wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ . Do całki  $\int \psi(v(t)/v_\infty) v_\infty dx$  chcemy zastosować Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajorzowanej. To zakończy dowód ponieważ  $\psi(v_\infty/v_\infty) = \psi(1) = 0$ .

Zauważmy, że  $v_\infty \in L^1(\mathbb{R})$ . Wystarczy udowodnić, że  $\psi(v(x, t)/v_\infty(x))$  jest jednostajnie ograniczone względem  $x$  i  $t$ . W tym celu wybieramy  $A > 0$  tak duże, aby

$$0 \leq v_0(x) \leq Av_\infty(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Jest to możliwe, ponieważ  $v_0$  jest ciągła i ma nośnik zwarty. Z zasady maksimum dla równania (7.4) wynika, że

$$0 \leq v(x, t) \leq Av_\infty(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

bo  $Av_\infty$  jest rozwiązaniem równania (7.4) dla każdego  $A \in \mathbb{R}$ . Stąd mamy  $|v(x, t)/v_\infty(x)| \leq A$ , a zatem

$$\left| \psi \left( \frac{v(x, t)}{v_\infty(x)} \right) \right| \leq \sup_{0 \leq s \leq A} |\psi(s)| < \infty,$$

co kończy dowód.  $\square$

W dalszej części naszych rozważań kluczową rolę odgrywa nierówność Csi-szára–Kullbacka

$$(8.1) \quad \|v(t) - v_\infty\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{K}} \sqrt{\Sigma_\psi(v(t), v_\infty)},$$

gdzie  $K$  jest pewną dodatnią stałą. Dowód nierówności (8.1) podamy w Dodatku, zamieszczonym na końcu tych wykładów. Teraz tylko podkreślimy, że nierówność (8.1) to nic innego jak rozwinięcie Taylora drugiego rzędu nierówności Jensena.

Zauważmy, że stosując Twierdzenie 8.4 do nierówności (8.1) otrzymamy, że  $v(t) \rightarrow v_\infty$  w  $L^1(\mathbb{R})$  gdy  $t \rightarrow \infty$ . To jednak już wiemy na podstawie Twierdzenia 7.2. Naszym kolejnym celem będzie udowodnienie, że zbieżność ta jest wykładnicza.

**Twierdzenie 8.5.** *Niech  $v(t)$ ,  $v_0$  i  $v_\infty$  będą takie jak w Twierdzeniu 8.3. Oznaczmy*

$$I(t) = - \int_{\mathbb{R}} \psi'' \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) \left[ \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right)_x \right]^2 v_\infty dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \psi \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) v_\infty dx.$$

Wtedy

$$(8.2) \quad \frac{d}{dt} |I(t)| \leq -2|I(t)|.$$

*Dowód.* Ponieważ  $-I(t) \geq 0$ , więc wystarczy udowodnić, że  $(d/dt)I(t) \geq -2I(t)$ . Wprowadźmy nową funkcję

$$K(t) = \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right)_x,$$

która spełnia równość  $v_t = (v_\infty K)_x$ . Obliczamy pochodną

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= - \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \psi'' \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) K^2 v_\infty dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi''' \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) (v_\infty K)_x K^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}} \psi'' \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) K_t K v_\infty dx \equiv A + B. \end{aligned}$$

Składnik  $A$  całkujemy przez części. Ponieważ rozwiązanie  $v(x, t)$  szybko dąży do 0, gdy  $|x| \rightarrow \infty$ , więc możemy zakładać, że wyrazy brzegowe dla  $x = \infty$  i  $x = -\infty$  są równe zeru. Stąd

$$A = \int_{\mathbb{R}} \psi^{iv} \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) K^4 v_{\infty} dx + \int_{\mathbb{R}} \psi''' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) 2K_x K^2 v_{\infty} dx.$$

Aby zająć się składnikiem  $B$ , przekształćmy najpierw wyrażenie  $K_t K v_{\infty}$ . Zauważmy, że z jawnego wzoru na  $v_{\infty}$  wynika równość  $(v_{\infty})_x = -x v_{\infty}$ . Wiemy też, że  $v_t = (v_{\infty} K)_x$ . Dlatego mamy

$$\begin{aligned} K_t &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right)_x = \left( \frac{v_t(t)}{v_{\infty}} \right)_x = \left( \frac{(v_{\infty} K)_x}{v_{\infty}} \right)_x \\ &= (-xK + K_x)_x = -K - xK_x + K_{xx}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$K_t K v_{\infty} = -K^2 v_{\infty} - x v_{\infty} K_x K + K_{xx} K v_{\infty} = \frac{1}{2} (v_{\infty} (K^2)_x)_x - K^2 v_{\infty} - (K_x)^2 v_{\infty}.$$

Przecałkujemy jeszcze przez części całkę

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathbb{R}} \psi'' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) \frac{1}{2} [v_{\infty} (K^2)_x]_x dx \\ = \int_{\mathbb{R}} \psi''' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) K (K^2)_x v_{\infty} dx = \int_{\mathbb{R}} \psi''' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) 2K_x K^2 v_{\infty} dx. \end{aligned}$$

Teraz możemy już zapisać składnik  $B$  w nowej postaci

$$\begin{aligned} B &= -2 \int_{\mathbb{R}} \psi'' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) K_t K v_{\infty} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi''' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) 2K_x K^2 v_{\infty} dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}} \psi'' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) K^2 v_{\infty} dx + 2 \int_{\mathbb{R}} \psi'' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) (K_x)^2 v_{\infty} dx. \end{aligned}$$

Uporządkujemy teraz powyższe równości w następujący sposób

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= A + B \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \psi^{iv} \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) K^4 + \psi''' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) 4K_x K^2 + 2\psi'' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) (K_x)^2 \right] v_{\infty} dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}} \psi'' \left( \frac{v(t)}{v_{\infty}} \right) K^2 v_{\infty} dx. \end{aligned}$$

Drugi składnik po prawej stronie to oczywiście  $-2I(t)$ . Pierwszy składnik jest nieujemny, ponieważ  $v_{\infty} \geq 0$  oraz wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest

równe  $\text{Tr}(X \cdot Y)$  (śląd iloczynu macierzy), gdzie

$$X = \begin{pmatrix} 2\psi'' & 2\psi''' \\ 2\psi''' & \psi^{iv} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} (K_x)^2 & K^2 K_x \\ K^2 K_x & K^4 \end{pmatrix}.$$

Macierz  $X$  jest dodatnio określona ponieważ  $2\psi'' \geq 0$  i  $\det X = 2\psi''\psi^{iv} - 4(\psi''')^2 \geq 0$  z założeń o funkcji  $\psi$ . Łatwo sprawdza się dodatnią określoność macierzy  $Y$ . To implikuje  $\text{Tr}(X \cdot Y) \geq 0$ .

Zatem  $(d/dt)I(t) \geq -2I(t)$ , a ponieważ  $-I(t) \geq 0$ , więc natychmiast otrzymujemy nierówność (8.2).  $\square$

**Wniosek 8.6.** *Przy założeniach Twierdzenie 8.5, zachodzi nierówność*

$$|I(t)| \leq |I(0)|e^{-2t}.$$

*Dowód.* Nierówność (8.2) zapisaną w postaci

$$\frac{d}{dt}|I(t)| + 2|I(t)| \leq 0$$

mnożymy przez  $e^{2t}$  otrzymując

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}|I(t)|) \leq 0$$

i całkujemy po przedziale  $[0, t]$ .  $\square$

Wykładnicze malenie relatywnej entropii natychmiast wynika z Twierdzenia 8.5. Jest to najważniejszy wynik w tym rozdziale i sformułujemy go poniżej jako wniosek.

**Wniosek 8.7.** *Przy założeniach Twierdzenia 8.5*

$$\Sigma_\psi(v(t), v_\infty) \leq \sigma(v_0, v_\infty)e^{-2t}.$$

*Dowód.* Przypomnijmy, że pokazaliśmy już (zob. Twierdzenie 8.3 oraz nierówność (8.2)), że

$$(8.3) \quad \frac{d}{dt}\Sigma(t) = I(t) \quad \text{ i } \quad \frac{d}{dt}I(t) \geq -2I(t)$$

oraz  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = 0$ . Całkujemy  $\int_t^\infty \dots ds$  nierówność

$$\frac{d}{dt}I(t) \geq -2\frac{d}{dt}\Sigma(t),$$

będącą wnioskiem z (8.3) i otrzymujemy  $-I(t) \geq 2\Sigma(t)$ . Stosując znów równość z (8.3) dostajemy

$$\frac{d}{dt}\Sigma(t) \leq -2\Sigma(t),$$

której scałkowanie (tak jak w dowodzie Wniosku 8.6) kończy dowód.  $\square$

**Uwaga.** Nierówność Csiszara–Kullbacka (8.1) implikuje natychmiast wykładniczą zbieżność rozwiązań do rozwiązań stacjonarnych

$$\|v(t) - v_\infty\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{K}} \sqrt{\Sigma(v_0, v_\infty)} e^{-t}.$$

W ten sposób cel tej części wykładu został osiągnięty.

### 9. Wypukłe nierówności typu Sobolewa

Okazuje się, że dowodząc wykładniczego malenia relatywnej entropii, otrzymaliśmy całą klasę nierówności zwanych wypukłymi nierównościami typu Sobolewa. Przypomnijmy najpierw, że klasyczna nierówność Sobolewa mówi, że dla dowolnej funkcji  $u \in L^{2n/(n-2)}(\mathbb{R}^n)$  takiej, że  $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  zachodzi nierówność

$$\|u\|_{2n/(n-2)} \leq A \|\nabla u\|_2,$$

gdzie  $n \geq 3$  i stała  $A$  zależy tylko od  $n$ . Podobnego typu jest nierówność Poincaré'go dla *ograniczonych* obszarów  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Mówi ona, że istnieje stała  $K = K(\Omega)$  taka, że dla każdej funkcji  $v \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq K \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Przy okazji naszych rozważań udowodniliśmy całą klasę podobnych nierówności.

**Twierdzenie 9.1.** *Niech  $\psi$  będzie funkcją generującą relatywną entropię. Oznaczmy*

$$F_\psi(z) = \int_1^z \sqrt{\psi''(s)} ds.$$

*Przypomnijmy, że  $v_\infty(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ . Dla każdej funkcji  $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $v_0 \geq 0$ , takiej, że  $\int_{\mathbb{R}} v_0(x) dx = 1$  zachodzi nierówność*

$$(9.1) \quad \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) v_\infty dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x} F_\psi\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)\right)^2 v_\infty dx.$$

*Dowód.* Jest to nasza nierówność  $-I(t) \geq 2\Sigma(t)$  użyta w dowodzie Wniosku 8.7 i wyliczona w punkcie  $t = 0$ . Aby to zobaczyć należy tylko przekształcić  $-I(t)$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned} -I(t) &= \int_{\mathbb{R}} \psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) \left[\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)_x\right]^2 v_\infty dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)} \left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)_x \sqrt{\psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)} \left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)_x v_\infty dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(F_\psi\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)\right)_x \left(F_\psi\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)\right)_x v_\infty dx. \quad \square \end{aligned}$$

Podstawiając w nierówności (9.1)  $u = v_0/v_\infty$  otrzymujemy tzw. *wypukła nierówność typu Sobolewa*

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(u)v_\infty dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (F(u)_x)^2 v_\infty dx$$

prawdziwą dla dowolnej funkcji  $u \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $u \geq 0$  spełniającej

$$\int uv_\infty dx = \int v_\infty dx = 1.$$

Podstawiamy teraz  $u = w/(\int wv_\infty dx)$ , aby otrzymać inną wersję tej nierówności

$$\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{w}{\int wv_\infty dx}\right)v_\infty dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(F_\psi\left(\frac{w}{\int wv_\infty dx}\right)_x\right)^2 v_\infty dx$$

dla każdej funkcji  $w \in L^1(\mathbb{R}, v_\infty(x) dx)$ ,  $w \geq 0$ .

Jeszcze jedno podstawienie  $w = f^2$  daje nierówność

$$(9.2) \quad \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{f^2}{\|f\|_{L^2(v_\infty dx)}^2}\right)v_\infty dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{f^2}{\|f\|_{L^2(v_\infty dx)}^4} \psi''\left(\frac{f^2}{\|f\|_{L^2(v_\infty dx)}^2}\right)(f_x)^2 v_\infty dx$$

dla każdej funkcji  $f \in L^2(\mathbb{R}, v_\infty dx)$ .

Rozważmy teraz pewną szczególną funkcję  $\psi$  generującą relatywną entropię. Dla  $\psi(s) = s \log s - s + 1$ , mamy  $\psi''(s) = 1/s$ . Wtedy

$$F(s) = \int_1^s \frac{1}{\sqrt{z}} dz = 2\sqrt{s} - 2.$$

Wówczas nierówność (9.2) przybiera postać

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 \log\left(\frac{f^2}{\|f\|_{L^2(v_\infty)}^2}\right)v_\infty dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}} (f_x)^2 v_\infty dx.$$

Jest to szczególny przypadek logarytmicznej nierówności Sobolewa udowodnionej przez L. Grossa (Amer. J. Math. **97** (1975), 1061–1083).

Dla kwadratowych funkcji  $\psi(s) = (s-1)^2$  otrzymujemy nierówność Becknera (Proc. Amer. Math. Soc. **105**, 397–400)

$$\int_{\mathbb{R}} v^2 v_\infty dx - \left(\int_{\mathbb{R}} vv_\infty dx\right)^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |v_x|^2 v_\infty dx$$

dla każdej funkcji  $v \in L^1(\mathbb{R}, v_\infty dx)$ .

### 10. Dodatek: Nierówność Csiszara–Kullbacka

W rozdziale tym udowodnimy nierówność Csiszara–Kullbacka, którą sformulujemy tutaj w nieco ogólniejszej postaci niż (8.1).

**Twierdzenie 10.1.** *Załóźmy, że*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty,
- $\psi \in C^2((0, \infty))$  jest nieujemna i wypukła na  $[0, \infty)$  oraz  $\psi(1) = 0$ ,
- $\mu$  jest nieujemną miarą na  $\Omega$ ,
- $f$  i  $g$  są nieujemnymi i  $\mu$ -mierzalnymi funkcjami na  $\Omega$ ,
- $M = \int_{\Omega} f(x) d\mu = \int_{\Omega} g(x) d\mu$ .

Wówczas istnieje stała  $K > 0$  taka, że

$$(10.1) \quad \int_{\Omega} \psi\left(\frac{f}{g}\right) g d\mu \geq \frac{K}{M} \|f - g\|_{L^1(\Omega, d\mu)}^2.$$

*Dowód.* Ustalmy zbiór  $\omega \subset \Omega$  i całkwalną funkcję  $k = k(x) \geq 0$  na  $\omega$ . Z nierówności Cauchy'ego–Schwarza wynika

$$\int_{\omega} |f - g| d\mu = \int_{\omega} \frac{|f - g|}{\sqrt{k}} \sqrt{k} d\mu \leq \left( \int_{\omega} \frac{|f - g|^2}{k} d\mu \right)^{1/2} \left( \int_{\omega} k d\mu \right)^{1/2},$$

czyli

$$(10.2) \quad \int_{\omega} \frac{|f - g|^2}{k} d\mu \geq \frac{(\int_{\omega} |f - g| d\mu)^2}{\int_{\omega} k d\mu}.$$

Dla ułatwienia, możemy założyć, że  $f > 0$  i  $g > 0$ . Niech

$$h = \frac{f - g}{g} \quad \text{czyli} \quad \frac{f}{g} = 1 + h.$$

Rozwijamy funkcję  $\psi(s)$  ze wzoru Taylora wokół punktu  $s = 1$ . Pamiętając, że  $\psi(1) = 0$  otrzymujemy

$$\psi\left(\frac{f}{g}\right) = \psi(1 + h) = \psi'(1)h + \frac{1}{2}\psi''(1 + \theta h)h^2,$$

gdzie  $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$ . Zauważmy jeszcze, że

$$\int_{\Omega} \psi'(1)hg d\mu = \psi'(1) \int_{\Omega} \frac{f - g}{g} g d\mu = \psi'(1)(M - M) = 0.$$

Tak więc, stosując powyższe rozwinięcie Taylora, otrzymamy tożsamość

$$\int_{\Omega} \psi\left(\frac{f}{g}\right) g d\mu = \int_{\Omega} \psi''(1 + \theta h)h^2 g d\mu,$$

i teraz powinniśmy oszacować prawą stronę.

Wykorzystując nierówność (10.2) otrzymujemy najpierw

$$\begin{aligned} \int_{f < g} \psi''(1 + \theta h) h^2 g \, d\mu &= \int_{f < g} \psi''(1 + \theta h) \frac{|f - g|^2}{g} \, d\mu \\ &\geq K_1 \int_{f < g} \frac{|f - g|^2}{g} \, d\mu \geq K_1 \frac{(\int_{f < g} |f - g| \, d\mu)^2}{\int_{f < g} g \, d\mu} \, d\mu, \end{aligned}$$

gdzie  $K_1 = \min_{s \in (0,1)} \psi''(s)$ .

Podobnie otrzymujemy drugie oszacowanie

$$\begin{aligned} \int_{f > g} \psi''(1 + \theta h) h^2 g \, d\mu &= \int_{f > g} \psi''(1 + \theta h) (1 + h) \frac{|f - g|^2}{f} \, d\mu \\ &\geq K_2 \int_{f > g} \frac{|f - g|^2}{f} \, d\mu \geq K_2 \frac{(\int_{f > g} |f - g| \, d\mu)^2}{\int_{f > g} f \, d\mu} \, d\mu, \end{aligned}$$

gdzie  $K_2 = \min_{\theta \in (0,1), h > 0} \psi''(1 + \theta h)(1 + h)$ .

Łącząc obydwa oszacowania otrzymujemy nierówność (10.1).  $\square$

#### LITERATURA

- [1] A. ARNOLD, P. MARKOWICH, G. TOSCANI, A. UNTERREITER, *On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker–Planck type equations*, Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), 43–100, <http://www.math.tu-berlin.de/~tmr/preprint>.
- [2] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Wydanie II, Dunod, Paris, 1999.
- [3] J. A. CARRILLO, G. TOSCANI, *Asymptotic  $L^1$ -decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 113–142, <http://www.math.tu-berlin.de/~tmr/preprint>.
- [4] E. DI BENEDETTO, *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1995.
- [5] J. DUOANDIKOETXEA, E. ZUAZUA, *Moments, masses de Dirac et décomposition de fonctions*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **315** (1992), 693–698.
- [6] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1998; Polskie tłumaczenie: *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa, 2002.
- [7] G. B. FOLLAND, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- [8] F. JOHN, *Partial Differential Equations*, Fourth Edition, Springer–Verlag, New York, Berlin, 1981.
- [9] H. MARCINKOWSKA, *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, PWN, Warszawa, 1993.
- [10] R. MCOWEN, *Partial Differential Equations. Methods and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
- [11] E. STEIN, G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
- [12] W. A. STRAUSS, *Partial Differential Equations. An Introduction*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.



- [13] G. TOSCANI, *Kinetic approach to the asymptotic behaviour of the solution to diffusion equations*, Rend. Mat. Appl. **16** (1996), 329–346.
- [14] N. A. WATSON, *Parabolic Equations on an Infinite Strip*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1988.
- [15] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, 2nd edition, Springer–Verlag, New York, 1968.

GRZEGORZ KARCH  
Uniwersytet Wrocławski  
oraz  
Polska Akademia Nauk (2002–2003)  
*E-mail*: karch@math.uni.wroc.pl



## RÓWNANIE POISSONA

TADEUSZ NADZIEJA

### Spis treści

1. Wstęp.
2. Interpretacje fizyczne równania Poissona.
3. Słabe pochodne i przestrzenie funkcyjne.
4. Istnienie, jednoznaczność i regularność słabych rozwiązań.
5. Rozwiązania klasyczne.
6. Nieliniowe równania Poissona.
7. Nielokalne zagadnienia eliptyczne.

### 1. Wstęp

Wykłady te poświęcone są równaniu Poissona

$$(1.1) \quad -\Delta u = f.$$

Przypomnijmy, że symbolem  $\Delta u$  oznaczamy *laplasjan funkcji*  $u$ ,

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot \nabla u.$$

W kartezjańskim układzie współrzędnych

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

Funkcja niewiadoma  $u$  jest określona na otwartym podzbiórze  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , a  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest zadaną funkcją rzeczywistą, bądź też funkcją niewiadomej  $u$ ,  $f = f(u)$ . W tym drugim przypadku, jeśli  $f$  jest nieliniowa, mówimy o nieliniowym

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35-01, 35J05.

równaniu Poissona. Rozważymy również sytuację, gdy prawa strona (1.1) zależy w sposób nieliniowy i nielokalny od  $u$ .

Na  $u$  nakładamy warunki brzegowe typu Dirichleta

$$(1.2) \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

gdzie  $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest zadaną funkcją.

Zakładamy, że  $\Omega$  jest obszarem ograniczonym a jego brzeg  $\partial\Omega$  jest klasy  $C^k$ , tzn. lokalnie jest wykresem funkcji klasy  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

Duża część wyników przedstawiona poniżej dla zagadnienia (1.1), (1.2) przenosi się bez trudu na przypadek, gdy zamiast laplasjanu rozpatrujemy operator eliptyczny

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

gdzie  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$  i  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > a|\xi|^2$  dla pewnej stałej  $a > 0$  i każdego wektora  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

Źródłem większości interesujących równań różniczkowych cząstkowych są modele zjawisk fizycznych. Podamy przykłady kilku z nich oraz opiszemy ich związek z równaniem Poissona. Dalej wprowadzimy aparat matematyczny potrzebny do dowodu istnienia i jednoznaczności jego słabych rozwiązań oraz ich regularności. Następnie zajmiemy się istnieniem rozwiązań klasycznych. Na koniec udowodnimy kilka faktów dotyczących problemu istnienia i nieistnienia rozwiązań nieliniowych (i nielokalnych) równań Poissona (równania typu Poissona–Boltzmann).

Większość przedstawionego materiału można znaleźć w podręcznikach [5], [6], [7] i klasycznej monografii [3]. Warto polecić, ostatnio przetłumaczony na język polski, podręcznik [2] oraz krótką (ale trudną) monografię [4], zawierającą również wyniki z ostatnich lat. Związki równania Poissona z modelami zjawisk fizycznych i chemicznych opisane są w starym i szeroko znanym podręczniku Tichonowa i Samarskiego [10]. Nowocześniejsze ujęcie tych zagadnień można znaleźć w niedawno wydanym podręczniku autorstwa I. i L. Rubinsteinów [9]. Pozycja [1] to zbiór przykładów, kontrprzykładów i zadań (czasami bardzo trudnych).

Przypomnijmy podstawowe wzory, z których później będziemy wielokrotnie korzystać.

Zacznijmy od *wzoru na całkowanie przez części*. Jeśli brzeg obszaru  $\partial\Omega \in C^1$ , funkcje  $u, v$  są różniczkowalne w  $\Omega$  i przedłużają się wraz z pochodnymi na domknięcie  $\Omega$ ,  $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ , to

$$(1.3) \quad \int_{\Omega} u_{x_i}(x)v(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x) dS_x - \int_{\Omega} u(x)v_{x_i}(x) dx,$$

gdzie  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$  jest wektorem normalnym zewnętrznym do  $\partial\Omega$  w punkcie  $x$ .

Zakładamy, że  $\vec{A}(x) = (A_1(x), \dots, A_n(x))$  jest polem wektorowym określonym na  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega \in C^1$ ,  $A_i(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$  i  $\operatorname{div} \vec{A} \in L^1(\Omega)$ . Wtedy zachodzi wzór Gaussa

$$(1.4) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{A}(x) \cdot \nu(x) dS_x.$$

Dla  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  i  $\Delta u \in L^1(\Omega)$  z tożsamości

$$v\Delta u = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \cdot \nabla v$$

dostajemy

$$(1.5) \quad \int_{\Omega} v\Delta u = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Jeśli  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  i  $\Delta u, \Delta v \in L^1(\Omega)$ , to z (1.5) mamy

$$(1.6) \quad \int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right).$$

Ostatnie dwa wzory nazywamy *wzorami Greena*.

## 2. Interpretacje fizyczne równania Poissona

**2.1. Równanie membrany.** Prawie każdy zabawiał się zanurzając w roztworze mydła pętelkę z drutu. Po jej wyciągnięciu rozpostarta jest na niej powierzchnia (membrana), której kształt zależy od sposobu w jaki został drut powyginany. Przedstawiamy ją wykresem funkcji  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Interesuje nas równanie, jakie spełnia  $u$ .

Skomplikujmy nieco nasze zadanie zakładając, że na membranę działa siła zewnętrzna o gęstości  $f$  równoległa do osi  $0u$ , tzn. na element powierzchni rozpostarty nad małym zbiorem  $\omega \subset \Omega$ , zawierającym punkt  $x$ , działa siła  $\approx f(x)|\omega|$  ( $|\omega|$  jest polem powierzchni  $\omega$ ). Możemy myśleć, że delikatnie dmuchamy na membranę w kierunku prostopadłym do niej. Uwzględniamy również działanie siły sprężystej proporcjonalnej do zmiany pola powierzchni membrany.

Zmieniając kształt membrany opisaną funkcją  $w(x)$ , do kształtu zadanego funkcją  $W(x)$ , siła  $f$  wykonuje pracę

$$\int_{\Omega} f(x)(W(x) - w(x)) dx,$$

a siły sprężyste pracę

$$- \int_{\Omega} k(\sqrt{1 + |\nabla W(x)|^2} - \sqrt{1 + |\nabla w(x)|^2}) dx,$$

gdzie przez  $k > 0$  oznaczyliśmy współczynnik sprężystości.

Energia potencjalna  $U(W)$  membrany  $W$  przybiera więc postać

$$U(W) = U(w) + \int_{\Omega} k(\sqrt{1 + |\nabla W(x)|^2} - \sqrt{1 + |\nabla w(x)|^2}) dx \\ + \int_{\Omega} f(x)(W(x) - w(x)) dx.$$

Jeśli gradienty funkcji  $W$  i  $w$  są małe, to korzystając ze wzoru Maclaurina dla funkcji  $\sqrt{1+x}$ , możemy napisać

$$U(W) \approx U(w) + \int_{\Omega} \left( \frac{k}{2} (|\nabla W(x)|^2 - |\nabla w(x)|^2) + f(x)(W(x) - w(x)) \right) dx.$$

Opieramy się teraz na zasadzie wariacyjnej, która mówi, że kształt jaki przybiera membrana, jest zadany wykresem funkcji  $u$ , dla której energia  $U(u)$  osiąga ekstremum w klasie wszystkich funkcji różniczkowalnych o zadanych wartościach na  $\partial\Omega$ , tzn. spełniających (1.2).

Niech  $v$  będzie funkcją różniczkowalną na  $\bar{\Omega}$ , równą 0 na  $\partial\Omega$ ,  $v \in C_0^1(\bar{\Omega})$ . Zgodnie z naszym założeniem,  $\mathcal{U}(t) = U(u + tv)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , osiąga ekstremum dla  $t = 0$ . Łatwo obliczyć, że

$$\mathcal{U}'(0) = \int_{\Omega} (k\nabla u \cdot \nabla v - fv) = 0.$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że  $u$  spełnia tożsamość całkową

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} fv \quad \text{dla } v \in C_0^1(\bar{\Omega}).$$

Jeśli założymy dodatkowo, że  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  i  $\Delta u \in L^1(\Omega)$ , to korzystając ze wzoru (1.5) dostajemy

$$\int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} kv\Delta u = \int_{\Omega} fv,$$

czyli

$$\int_{\Omega} (k\Delta u + f)v = 0 \quad \text{dla } v \in C_0^1(\bar{\Omega}).$$

Stąd otrzymujemy równanie Poissona na  $u$ .

Zagadnienie wyznaczenia kształtu membrany sprowadziliśmy do znalezienia rozwiązania równania (1.1) spełniającego warunek brzegowy (1.2). Zauważmy, że jeśli zrezygnujemy z dwukrotnej różniczkowalności  $u$  i ograniczymy się do  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , to nasz problem polega na znalezieniu funkcji spełniającej (2.1), (1.2). Jak się później okaże, tak postawione zagadnienie jest z pewnych względów o wiele wygodniejsze do badania i przy odpowiednich założeniach o regularności  $f$  i  $\partial\Omega$  jego rozwiązanie jest też rozwiązaniem równania Poissona.

**2.2. Równanie wiążące gęstość ładunku elektrycznego z wytworzonym potencjałem elektrycznym.** Jeśli w początku układu współrzędnych umieścimy ładunek elektryczny  $q$ , to potencjał  $\Phi$  wytworzony przez ten ładunek, zgodnie z prawem Coulomba, będzie równy  $\Phi(x) = \Phi(|x|) = q/|x|$ . Zauważmy, że dla każdej funkcji  $v$  klasy  $C^1$ , o nośniku zwartym,  $v \in C_c^1(\mathbb{R}^3)$ , spełniona jest równość

$$(2.2) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Phi \cdot \nabla v = 4\pi q v(0).$$

Istotnie, wykorzystując wzór na całkowanie przez części oraz fakt, że poza początkiem układu współrzędnych  $\Phi$  jest funkcją harmoniczną, dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Phi \cdot \nabla v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \nabla \Phi \cdot \nabla v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| = \varepsilon} \frac{q}{\varepsilon^2} (v(0) + o(1)) = 4\pi q v(0).$$

Założmy, że w obszarze  $\Omega$  ładunki elektryczne rozłożone są w sposób ciągły z gęstością  $\rho$ . Podzielmy  $\Omega$  na małe obszary  $\Omega_i$  i wybierzmy w każdym z nich dowolny punkt  $x_i$ . Całkowity ładunek zawarty w  $\Omega_i$ ,  $\int_{\Omega_i} \rho(x) dx$ , zastępujemy ładunkiem  $q_i = \rho(x_i)|\Omega_i|$  skupionym w  $x_i$ . Przypomnijmy, że  $|\Omega_i|$  jest objętością zbioru  $\Omega_i$ . Potencjał  $\bar{\Phi}$  wytworzony przez ładunki  $q_i$  jest sumą potencjałów pochodzących od poszczególnych ładunków, a więc zachodzi dla niego równość

$$(2.3) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla v = 4\pi \sum \rho(x_i) |\Omega_i| v(x_i).$$

Jeśli podział  $\Omega$  na zbiory  $\Omega_i$  jest coraz drobniejszy, to w granicy, gdy średnice  $\Omega_i$  dążą do 0, lewa strona (2.3) dąży do  $\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Phi \cdot \nabla v$ , gdzie  $\Phi$  jest potencjałem wytworzonym przez rozkład ładunków z gęstością  $\rho$ . Prawa strona zbiega natomiast do  $4\pi \int_{\mathbb{R}^3} \rho v$ . W rezultacie dostajemy tożsamość

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Phi \cdot \nabla v = 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} \rho v \quad \text{spełnioną dla każdej funkcji } v \in C_c^1(\mathbb{R}^3).$$

Zakładając dodatkowo, że  $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\Delta \Phi \in L^1(\Omega)$  mamy

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Phi \cdot \nabla v = - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \Phi v = 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} \rho v.$$

Stąd natychmiast otrzymujemy równanie

$$(2.4) \quad -\Delta \Phi = 4\pi \rho.$$

W przypadku, gdy zamiast oddziaływań elektrycznych rozpatrujemy grawitacyjne, równanie wiążące gęstość rozkładu masy  $\rho$  z potencjałem grawitacyjnym  $\Phi$  przez niego wytworzonym ma postać

$$(2.5) \quad \Delta \Phi = 4\pi \rho.$$

**2.3. Równanie opisujące rozkład temperatury.** Zakładamy, że w obszarze ograniczonym  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  rozmieszczone są źródła ciepła z gęstością  $\rho$ , tzn. dla  $\omega \subset \Omega$ ,  $\int_{\omega} \rho$  jest ilością ciepła produkowaną w  $\omega$  w jednostce czasu. Na brzegu  $\Omega$  temperaturę zadajemy. Naszym celem jest wyprowadzenie równania wiążącego rozkład temperatury  $T(x)$  z gęstością  $\rho$ .

Wykorzystamy następujące, dosyć jasne z fizycznego punktu widzenia, założenia:

- (Z1) Jeśli na brzegu kuli  $K_R(x_0)$  zadany jest rozkład temperatury  $T$ , a wewnątrz nie ma źródeł ciepła, to temperatura w punkcie  $x_0$  równa jest średniej temperaturze na sferze  $S_R(x_0)$ ,  $T(x_0) = (1/4\pi R^2) \int_{S_R(x_0)} T$ .
- (Z2) Przepływ ciepła przez powierzchnię  $S$  równy jest  $\kappa \int_S (\partial T / \partial \nu)$  (prawo Fouriera), gdzie  $\kappa$  jest dodatnią stałą.

Dalej, dla prostoty przyjmujemy, że  $\kappa$ , jak i wszystkie inne stałe fizyczne są równe 1.

**Definicja 2.1.** Funkcja  $u$ , ciągła na otwartym podzbiornie  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , ma *własność średniej*, jeśli dla każdej sfery  $S_R(x) \subset \Omega$ , średnia wartość  $u$  na tej sferze równa jest wartości funkcji  $u$  w środku tej sfery,

$$\frac{1}{R^{n-1} \sigma_n} \int_{S_R(x)} u = u(x)$$

(przez  $\sigma_n$  oznaczyliśmy pole powierzchni sfery jednostkowej w  $\mathbb{R}^n$ ).

**Lemat 2.2** ([2]). *Jeśli  $u$  ma własność średniej, to funkcja  $u$  jest gładka i harmoniczna.*

*Dowód.* Oznaczmy przez  $\gamma(x)$  jądro wygładzające, tzn. nieujemną funkcję klasy  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , radialnie symetryczną, o nośniku zawartym w kuli  $K_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ , spełniającą warunek  $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma = 1$ . Definiujemy  $\gamma_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \gamma(x\varepsilon^{-1})$ . Wiadomo, że spłot  $u$  z  $\gamma_\varepsilon$ ,  $u_\varepsilon(x) := \gamma_\varepsilon \star u(x) = \int_{\Omega} u(y) \gamma_\varepsilon(x-y) dy$  jest funkcją gładką na  $\mathbb{R}^n$  (zob. [2]). Załóżmy, że  $x \in \Omega$  oraz  $\varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ . Łatwe obliczenia prowadzą do następujących równości:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} u(y) \gamma_\varepsilon(y-x) dy = \varepsilon^{-n} \int_{|y| < \varepsilon} u(x+y) \gamma(y/\varepsilon) dy \\ &= \int_{|y| < 1} u(x+\varepsilon y) \gamma(y) dy = \int_0^1 r^{n-1} dr \int_{S_1(0)} u(x+\varepsilon r w) \gamma(rw) dS_w \\ &= \int_0^1 \gamma(r) r^{n-1} dr \int_{|w|=1} u(x+\varepsilon r w) dS_w \\ &= u(x) \sigma_n \int_0^1 \gamma(r) r^{n-1} dr = u(x). \end{aligned}$$

W przedostatniej równości wykorzystaliśmy własność średniej funkcji  $u$ .



Wykazaliśmy, że  $u(x) = u_\varepsilon(x)$  na  $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ , a więc  $u$  jest gładka na  $\Omega$ . Jej harmoniczność wynika z równości

$$\int_{K_r(x)} \Delta u = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|w|=1} u(x+rw) dS_w = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_n u(x)) = 0,$$

spełnionej na każdej kuli  $K_r(x)$  zawartej w  $\Omega$ .  $\square$

Zakładamy, że w punkcie  $\bar{x} \in \Omega$  znajduje się źródło ciepła o wydajności  $q$ , a na brzegu  $\partial\Omega$  temperatura jest zadana. Interesuje nas temperatura  $T_{\bar{x}}(x)$  w dowolnym punkcie  $x \in \Omega$ .

Zgodnie z założeniem (Z2)  $\int_{|x-\bar{x}|=r} \partial T_{\bar{x}}(x) / \partial \nu = -q$ . Możemy też założyć, że w otoczeniu punktu  $\bar{x}$  funkcja  $T_{\bar{x}}$  jest „prawie” radialnie symetryczna, a więc

$$-\int_{|x-\bar{x}|=r} \frac{\partial T_{\bar{x}}(x)}{\partial \nu} = q \approx -4\pi r^2 T'_{\bar{x}}(r).$$

Wynika stąd, że w rozważanym otoczeniu,  $T_{\bar{x}}(x) \approx q/4\pi|x-\bar{x}|$ . Z założenia (Z1) wnioskujemy, że poza punktem  $\bar{x}$  funkcja  $T_{\bar{x}}(x)$  ma własność średniej, a więc jest harmoniczna.

Rozumując podobnie jak przy wyprowadzaniu równania wiążącego gęstość ładunków elektrycznych z potencjałem przez nią wytworzonym, dla każdej funkcji  $v \in C_c^1(\Omega)$  dostajemy

$$\int_{\Omega} \nabla T_{\bar{x}}(x) \cdot \nabla v = qv(\bar{x}).$$

Stąd, dla ciągłego rozkładu  $\rho$  źródeł ciepła,

$$\int_{\Omega} \nabla T(x) \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \rho v \quad \text{dla każdej funkcji } v \in C_c^1(\Omega).$$

Jeśli  $T \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\Delta T \in L^1(\Omega)$ , to oczywiście z ostatniej tożsamości otrzymujemy równanie

$$(2.6) \quad -\Delta T = \rho.$$

Jeśli na wstępie naszych rozważań założymy dwukrotną różniczkowalność  $T$ , to równanie (2.6) dostaniemy w prostszy sposób. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego  $\omega \subset \Omega$  przepływ ciepła przez  $\partial\omega$  równy jest ilości wytworzonego w nim ciepła, a więc

$$\int_{\omega} \rho = -\int_{\partial\omega} \frac{\partial T}{\partial \nu} = -\int_{\omega} \Delta T,$$

stąd wobec dowolności  $\omega$  wynika (2.6).

W przedstawionych modelach funkcja  $u$  opisująca zjawisko fizyczne spełniała tożsamość całkową

$$(2.7) \quad \int \nabla u \cdot \nabla v = \int f v,$$

a przy dodatkowym założeniu o regularności  $u$ , równanie

$$(2.8) \quad -\Delta u = f.$$

Udowodnienie istnienia funkcji  $u$  spełniającej tożsamość (2.7) jest na ogół łatwiejsze od wykazania istnienia rozwiązania równania (2.8). Przyczyna leży w tym, że w pierwszym przypadku możemy wybrać większą przestrzeń, w której szukamy rozwiązań.

Zagadnienie (1.1)–(1.2) będziemy rozpatrywać na otwartym, ograniczonym podzbiorze  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definicja 2.3.** Funkcję  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  nazywamy *klasycznym rozwiązaniem* zagadnienia (1.1)–(1.2), jeśli  $u$  spełnia równanie (1.1) i warunek brzegowy (1.2).

Poniższy przykład wskazuje, że (1.1)–(1.2) nie zawsze ma rozwiązanie klasyczne, nawet przy dosyć mocnych założeniach o  $f$ .

**Przykład 2.4** ([4], [7]). Rozpatrujemy równanie Poissona w kole  $K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < R < 1\}$  postaci

$$(2.9) \quad -\Delta u = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2|x|^2} \left( \frac{4}{(-\ln|x|)^{1/2}} + \frac{1}{(2(-\ln|x|))^{3/2}} \right) =: f(x_1, x_2).$$

Przyjmując 0 jako wartość prawej strony w  $(0, 0)$ ,  $f$  staje się funkcją ciągłą na  $K$ . Łatwo sprawdzić, że  $h(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2)(-\ln|x|)^{1/2}$  jest rozwiązaniem (2.9) w  $K \setminus (0, 0)$ , pierwsze pochodne cząstkowe  $h$  są ograniczone w  $K$  oraz  $h_{x_1 x_1}(x_1, x_2)$  dąży do  $\infty$ , gdy  $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ .

Udowodnimy, że (2.9) nie ma rozwiązań klasycznych. Załóżmy, że takie rozwiązanie  $u$  istnieje. Wtedy  $w = u - h$  jest funkcją harmoniczną w  $K \setminus (0, 0)$  i ograniczoną. Definiujemy

$$p(x) := \int_{\gamma} -w_{x_2} dx_1 + w_{x_1} dx_2,$$

gdzie  $\gamma$  jest dowolną krzywą łączącą ustalony punkt  $x_0$  z  $x$ . Zauważmy, że funkcja  $p$  jest dobrze określona, tzn.  $p(x)$  nie zależy od drogi całkowania. Istotnie, jeśli krzywe  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  łączą te same punkty i  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  ogranicza obszar  $\Omega_1$  nie zawierający we wnętrzu  $(0, 0)$ , to ponieważ w  $\Omega_1$   $w$  jest harmoniczna, mamy

$$(2.10) \quad \int_{\gamma_1} -w_{x_2} dx_1 + w_{x_1} dx_2 = \int_{\gamma_2} -w_{x_2} dx_1 + w_{x_1} dx_2.$$

Jeśli  $(0, 0) \in \Omega_1$ , to całka po krzywej zamkniętej złożonej z  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , okręgu  $S_\varepsilon$  o promieniu  $\varepsilon$  i środka  $(0, 0)$  zawartego w  $\Omega_1$  oraz odcinka łączącego  $S_\varepsilon$  z  $\gamma_1$  obieganego dwa razy w przeciwnych kierunkach, jest równa 0. Stąd  $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} -w_{x_2} dx_1 + w_{x_1} dx_2 = \int_{S_\varepsilon} -w_{x_2} dx_1 + w_{x_1} dx_2$ . Pierwsze pochodne cząstkowe  $w$  są ograniczone, a więc prawa strona ostatniej równości dąży do 0, gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pociąga to równość (2.10).

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy punkt  $(0, 0)$  leży na  $\gamma_1$  bądź  $\gamma_2$ . Zauważmy, że dzięki ograniczonosci pierwszych pochodnych cząstkowych funkcji  $w$ , małe zmiany krzywej  $\gamma$  dają małe zmiany całki  $\int_{\gamma} -w_{x_2} dx_1 + w_{x_1} dx_2$ . Jeśli równość (2.10) spełniona jest dla wszystkich krzywych  $\gamma_1, \gamma_2$  nie przechodzących przez  $(0, 0)$ , to zachodzi też dla dowolnych krzywych. Łatwo zauważyć, że  $p$  jest funkcją sprzężoną do  $w$ , tzn.  $w + ip$  jest analityczna w  $K \setminus (0, 0)$  i ograniczona. Można więc określić ją w  $(0, 0)$ , tak aby była analityczna na całym  $K$ , a więc  $w$  byłaby harmoniczna w  $K$ . Przeczy to nieograniczoności jej pochodnych  $w_{x_1 x_1}$ .

Dalej wrócimy do problemu założeń o funkcji  $f$  gwarantujących istnienie rozwiązań klasycznych.

### 3. Słabe pochodne i przestrzenie funkcyjne

Niech  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  i  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Oznaczmy  $D^{\alpha} u := \partial^{\alpha_1} u / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$  i  $D^{\alpha} u := D^{\alpha_1} \dots D^{\alpha_n} u$ . Zakładamy, że  $u \in C^k(\bar{\Omega})$ , tzn. w  $\bar{\Omega}$  istnieją pochodne  $D^{\alpha} u$ ,  $|\alpha| \leq k$  i przedłużają się do funkcji ciągłych na  $\bar{\Omega}$ .  $C^k(\bar{\Omega})$  jest przestrzenią Banacha z normą  $\|u\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u(x)|$ .

Jeśli  $u \in C^1(\Omega)$  i  $v$  jest funkcją o nośniku zwartym zawartym w  $\Omega$ ,  $v \in C_c^1(\Omega)$ , to z (1.3) dostajemy

$$(3.1) \quad \int_{\Omega} uv_{x_i} = - \int_{\Omega} u_{x_i} v.$$

Równość (3.1) spełniona dla każdej funkcji  $v \in C_c^1(\Omega)$  wyznacza jednoznacznie  $u_{x_i}$ . Fakt ten jest punktem wyjścia do definicji słabej pochodnej.

Niech  $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ , tzn.  $u$  jest całkowalna z kwadratem na każdym zwartym podzbiórze  $\Omega$ .

**Definicja 3.1.** Funkcję  $u^{\alpha} \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$  nazywamy *słabą pochodną* rzędu  $\alpha$  funkcji  $u$ , jeśli dla każdej funkcji  $v \in C_c^{\infty}(\Omega)$

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} u D^{\alpha} v = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u^{\alpha} v.$$

Słabe pochodne oznaczamy takim samym symbolem jak pochodne w klasycznym sensie. Z kontekstu będzie wynikać jakie pochodne mamy na myśli. Nietrudno wykazać, że słaba pochodna  $D^{\alpha} u$  jest wyznaczona jednoznacznie, nie zależy od kolejności różniczkowania, a dla funkcji różniczkowalnych w klasycznym sensie jest identyczna z klasyczną pochodną. Przypomnijmy też, że słaba pochodna, jako element  $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ , jest określona prawie wszędzie.

**Przykład 3.2.** Wykażemy, że funkcja  $u(x) = |x|$  na  $(-1, 1)$  ma słabą pochodną  $u'(x) = 1$  dla  $x > 0$  i  $u'(x) = -1$  dla  $x < 0$ .

Istotnie, dla dowolnej funkcji  $v \in C_c^\infty((-1, 1))$

$$\int_{-1}^1 uv' = - \int_{-1}^0 xv'(x) dx + \int_0^1 xv'(x) dx = - \int_{-1}^1 u'v.$$

**Przykład 3.3.** Funkcja  $u(x) = x/|x|$  na  $(-1, 1)$  nie ma słabej pochodnej. Załóżmy, że taka pochodna  $u'$  istnieje. Wtedy dla dowolnej funkcji  $v \in C_c^\infty((-1, 1))$ ,  $\int_{-1}^1 u'v = - \int_{-1}^1 uv' = \int_{-1}^0 v' - \int_0^1 v' = 2v(0)$ . Wynika stąd, że dla  $v \in C_c^\infty((0, 1))$ ,  $\int_0^1 u'v = 0$ , a więc  $u'(x) = 0$  dla  $x > 0$ . Podobnie uzasadniamy, że  $u'(x) = 0$  dla  $x < 0$ . W rezultacie dostajemy, że  $u' \equiv 0$ . Przeczy to równości  $\int_{-1}^1 u'v = 2v(0)$ , jeśli tylko  $v(0) \neq 0$ .

Następny przykład pokazuje, że istnieją funkcje mające słabe pochodne drugiego rzędu, a nie posiadające słabych pierwszych pochodnych. Oczywiście tak nie może się zdarzyć, jeśli pochodne rozumiemy w klasycznym sensie.

**Przykład 3.4.** Rozpatrzmy w kole jednostkowym  $K_1(0) = \Omega \subset \mathbb{R}^2$  funkcję  $u(x_1, x_2) = x_1/|x_1| + x_2/|x_2|$ . Z poprzedniego przykładu wynika, że nie istnieją pochodne  $u_{x_i}$ . Zauważmy jednak, że istnieje pochodna  $u_{x_1x_2}$ . Jeśli bowiem  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ , to

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_{x_1x_2} u &= \int_{\Omega} v_{x_1x_2} \frac{x_1}{|x_1|} + \int_{\Omega} v_{x_1x_2} \frac{x_2}{|x_2|} \\ &= - \int_{\Omega \cap \{x_1 < 0\}} v_{x_1x_2} + \int_{\Omega \cap \{x_1 > 0\}} v_{x_1x_2} \\ &\quad - \int_{\Omega \cap \{x_2 < 0\}} v_{x_1x_2} + \int_{\Omega \cap \{x_2 > 0\}} v_{x_1x_2} = 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że  $u_{x_1x_2} \equiv 0$ .

Niech  $\gamma$  będzie jądrem wygładzającym. W dalszej części będziemy wykorzystywać następujące fakty [2], [7]:

- (P1) Jeśli  $u \in C^k(\Omega)$ , to  $u_\varepsilon(x) := \int_{\Omega} u(y)\gamma_\varepsilon(x-y) dy$  jest klasy  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  oraz dla każdego podzbioru zwartego  $\Omega' \subset\subset \Omega$ ,  $|u_\varepsilon - u|_{C^k(\Omega')} \rightarrow 0$ , gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- (P2) Jeśli  $u \in L^2(\Omega)$ , to  $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  i  $|u_\varepsilon - u|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ , gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- (P3) Jeśli  $u$  ma zwarty nośnik, to również  $u_\varepsilon$  ma nośnik zwarty.
- (P4) Operacja brania splotu z jądrem wygładzającym jest przemienna z różniczkowaniem

$$(3.3) \quad D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u)_\varepsilon$$

oraz

$$(3.4) \quad |D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u|_{L^2(\Omega')} \rightarrow 0,$$

gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$  i  $\Omega' \subset\subset \Omega$ .

**Uwaga 3.5.** Jeśli pierwsze pochodne cząstkowe są równe 0,  $u_{x_k} = 0$ , to  $u$  jest funkcją stałą. Istotnie, na mocy (3.3)  $(u_\varepsilon)_{x_k} = (u_{x_k})_\varepsilon = 0$ ; wynika stąd, że  $u_\varepsilon$  jest funkcją stałą,  $u_\varepsilon(x) = c(\varepsilon)$ . Korzystając z (3.4) dostajemy

$$|c(\varepsilon_1) - c(\varepsilon_2)|_{L^2(\Omega')} = |c(\varepsilon_1) - c(\varepsilon_2)|\sqrt{|\Omega'|} \rightarrow 0,$$

gdy  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ . Oznacza to, że  $u_\varepsilon$  dąży do stałej, a więc  $u \equiv \text{const}$ .

Pochodne w sensie klasycznym definiujemy za pomocą ilorazów różnicowych. Poniżej wykażemy, że w podobny sposób można zdefiniować słabe pochodne, jeśli granice ilorazów różnicowych rozumiemy w sensie zbieżności w  $L^2$ . Oznaczmy

$$D_h^k u = \frac{1}{h}(u(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_n)).$$

Prosty rachunek pokazuje, że jeśli  $u \in L^2(\Omega)$  jest funkcją o nośniku zwartym,  $u \in L_c^2(\Omega)$ ,  $v \in L^2(\Omega)$  i  $h$  jest dostatecznie małe, to dla ilorazów różnicowych prawdziwy jest odpowiednik wzoru na całkowanie przez części

$$(3.5) \quad (D_h^k u, v)_{L^2(\Omega)} = -(u, D_{-h}^k v)_{L^2(\Omega)},$$

gdzie  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$  oznacza iloczyn skalarny w  $L^2$ .

**Twierdzenie 3.6.** Zakładamy, że  $u \in L_c^2(\Omega)$ .

(a) Jeśli istnieje słaba pochodna  $u_{x_k}$ , to dla dostatecznie małych  $h$

$$(3.7) \quad |D_h^k u|_{L^2(\Omega)} \leq |u_{x_k}|_{L^2(\Omega)},$$

$$(3.8) \quad |D_h^k u - u_{x_k}|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } h \rightarrow 0.$$

(b) Jeśli istnieje taka stała  $C > 0$ , że  $|D_h^k u|_{L^2(\Omega)} \leq C$  dla dostatecznie małych  $h$ , to istnieje słaba pochodna  $u_{x_k}$  i  $|u_{x_k}|_{L^2(\Omega)} \leq C$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $u \in C_c^1(\Omega)$  i  $k = n$ . Wtedy

$$D_h^n u = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n+h} \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n,$$

gdzie  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Stąd

$$|D_h^n u|^2 = \frac{1}{h^2} \left( \int_{x_n}^{x_n+h} \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n \right)^2 \leq \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n+h} \left( \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right)^2 d\xi_n.$$

Całkując tę nierówność względem  $x_n$ , mamy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |D_h^n u|^2 dx_n &\leq \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_{x_n}^{x_n+h} \left( \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right)^2 d\xi_n \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_0^h \left( \frac{\partial u(x', \bar{\xi}_n + x_n)}{\partial \xi_n} \right)^2 d\bar{\xi}_n \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h d\bar{\xi}_n \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial u(x', \bar{\xi}_n + x_n)}{\partial \xi_n} \right)^2 dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right)^2 d\xi_n. \end{aligned}$$

Całkując teraz względem  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$  otrzymujemy (3.7) dla  $u \in C_c^1(\Omega)$ .

Jeśli funkcja  $u \in L_c^2(\Omega)$ , to wygładzamy ją, splatając z jądrem wygładzającym. Otrzymujemy funkcję  $u_\varepsilon \in C_c^1(\Omega)$ , dla której zachodzi nierówność

$$|D_h^n u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq |(u_\varepsilon)_{x_n}|_{L^2(\Omega)} = |(u_{x_n})_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}.$$

Przechodząc z  $\varepsilon \rightarrow 0$  i korzystając z (3.4) dostajemy (3.7) dla  $u \in L_c^2(\Omega)$ .

Aby wykazać (3.8), rozumując jak w dowodzie (3.7), możemy ograniczyć się do  $u \in C_c^1(\Omega)$ . Zauważmy, że

$$|D_h^n u(x) - u_{x_n}(x)| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n+h} \left( \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} - \frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n} \right) d\xi_n \right|.$$

Stąd

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} (D_h^n u(x) - u_{x_n}(x))^2 dx_n \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_{x_n}^{x_n+h} \left( \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} - \frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n} \right)^2 d\xi_n \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial u(x', x_n + \xi)}{\partial x_n} - \frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n} \right)^2 dx_n. \end{aligned}$$

Całkując tę nierówność względem  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ , dostajemy

$$|D_h^n u - u_{x_n}|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{h} \int_0^h d\xi \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u(x', x_n + \xi)}{\partial x_n} - \frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n} \right)^2 dx.$$

Całka

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u(x', x_n + \xi)}{\partial x_n} - \frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n} \right)^2 dx$$

dąży do 0, gdy  $h \rightarrow 0$ , a więc  $D_h^n u \rightarrow u_{x_n}$  w  $L^2$ . Wykorzystaliśmy następujący fakt: jeśli  $w \in L_c^2(\Omega)$ , to  $\int_{\Omega} (w(x+h) - w(x))^2 \rightarrow 0$ , gdy  $h \rightarrow 0$ .

Przejdźmy do dowodu punktu (b). Z założeń wynika, że rodzina funkcji  $D_h^k u$  jest słabo zwarta w  $L^2$ . Można więc wybrać z niej podciąg słabo zbieżny  $D_{h_m}^k u \rightarrow u$  i  $|\omega|_{L^2} \leq C$ . Korzystając z (3.6) mamy  $(D_{h_m}^k u, v)_{L^2(\Omega)} = -(u, D_{-h_m}^k v)_{L^2(\Omega)}$

dla każdej funkcji  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Przechodząc z  $m$  do nieskończoności dostajemy  $(\omega, v)_{L^2(\Omega)} = -(u, v_{x_k})_{L^2(\Omega)}$ , co oznacza, że  $u_{x_k} = \omega$ .  $\square$

**3.1. Przestrzenie  $H^k(\Omega)$ .** Oznaczmy przez  $H_{\text{loc}}^k(\Omega)$  podzbiór  $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  złożony z funkcji mających słabe pochodne do rzędu  $k$  włącznie. Zbiór  $H^k(\Omega) \subset H_{\text{loc}}^k(\Omega)$  składa się z funkcji, których słabe pochodne do rzędu  $k$  włącznie należą do  $L^2(\Omega)$ .  $H^k(\Omega)$  jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v.$$

Wymieńmy kilka podstawowych własności przestrzeni  $H^k(\Omega)$ :

- (H1) Jeśli  $u \in H^k(\Omega)$  i  $v \in C^k(\bar{\Omega})$ , to  $vu \in H^k(\Omega)$ .
- (H2) Dla każdego  $\Omega' \subset\subset \Omega$ ,  $u_\varepsilon \rightarrow u$  w  $H^k(\Omega')$ , gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- (H3) Jeśli  $\Omega \subset\subset \Omega'$ ,  $\partial\Omega \in C^k$ ,  $k \geq 1$ , to dla każdej funkcji  $u \in H^k(\Omega)$  ( $C^k(\Omega)$ ) istnieje taka funkcja  $U \in H^k(\Omega')$ , ( $U \in C^k(\Omega')$ ) o nośniku zwartym, że  $U|_{\Omega} = u$  i  $|U|_{H^k(\Omega')} \leq C|u|_{H^k(\Omega)}$ , ( $|U|_{C^k(\Omega')} \leq C|u|_{C^k(\Omega)}$ ), gdzie stała  $C$  zależy tylko od  $\Omega$  i  $\Omega'$ .
- (H4) Jeśli  $\partial\Omega \in C^k$ , to zbiór  $C^\infty(\bar{\Omega})$  jest gęsty w  $H^k(\Omega)$ .

Dalej korzystając będziemy z własności przedłużania funkcji  $\varphi \in C^k(\partial\Omega)$  do funkcji określonej na  $\bar{\Omega}$ .

- (H5) Przy założeniach  $\partial\Omega \in C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $\varphi \in C^k(\partial\Omega)$ , istnieje taka funkcja  $u \in C^k(\bar{\Omega})$ , że  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  i  $|u|_{C^k(\bar{\Omega})} \leq C|\varphi|_{C^k(\partial\Omega)}$ . Stała  $C$  zależy tylko od  $\Omega$ .

**3.2. Ślad funkcji.** Załóżmy, że  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\partial\Omega \in C^1$  i  $S$  jest kawałkiem brzegu  $\partial\Omega$  będącym wykresem funkcji  $x_n = \Phi(x_1, \dots, x_{n-1})$ . Z własności (H3) wynika, że można przedłużyć  $u$  na pewien prostopadłościan  $\Omega' = \{x : 0 \leq x_i \leq a\}$ ,  $\Omega \subset\subset \Omega'$  i przedłużenie to, oznaczamy je przez  $u$ , ma nośnik zwarty w  $\Omega'$ . Dla  $x \in S$  mamy

$$u(x) = u(x', \Phi(x')) = \int_0^{\Phi(x')} \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n.$$

Stąd

$$(|u(x)|_S)^2 \leq |\Phi(x')| \int_0^{\Phi(x')} \left( \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right)^2 d\xi_n \leq a \int_0^a \left( \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right)^2 d\xi_n.$$

Mnożąc tę nierówność przez  $\sqrt{1 + \Phi_{x_1}^2 + \dots + \Phi_{x_{n-1}}^2}$  i całkując po dziedzinie  $D$  funkcji  $\Phi$ , dostajemy

$$|u|_{L^2(S)}^2 \leq C^2 |u|_{H^1(\Omega)}^2,$$

a więc dla dowolnej funkcji  $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$(3.9) \quad |u|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C |u|_{H^1(\Omega)}.$$

Założmy, że  $u \in H^1(\Omega)$ . Z własności (H4) wynika istnienie takiego ciągu  $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , że  $u_n \rightarrow u$  w  $H^1(\Omega)$ . Z (3.9) otrzymujemy nierówność

$$|u_n - u_m|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C|u_n - u_m|_{H^1(\Omega)}.$$

Ciąg  $u_n$  na  $\partial\Omega$  jest więc fundamentalny w  $L^2(\partial\Omega)$ , a tym samym zbieżny w tej przestrzeni,  $u_n \rightarrow \tilde{u}$ . Funkcję  $\tilde{u} \in L^2(\partial\Omega)$  nazywamy *śladem funkcji  $u$  na  $\partial\Omega$* . Nie trudno wykazać, że  $\tilde{u}$  jest dobrze określona, tzn. nie zależy od wyboru ciągu  $u_n$ . Dla funkcji  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  ślad funkcji jest jej obcięciem do  $\partial\Omega$ .

Oznaczmy przez  $H_0^1(\Omega)$  funkcje z  $H^1(\Omega)$  o śladzie równym 0. Dalej wykorzystamy fakt, że  $H_0^1(\Omega)$  jest domknięciem zbioru  $C_c^\infty(\Omega)$  w topologii  $H^1$ .

Zgodnie z definicją, iloczyn skalarny w  $H_0^1(\Omega)$  zadany jest wzorem

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Z nierówności Poincarégo ([2], [3])  $|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2$ , prawdziwej dla dowolnej funkcji  $u \in H_0^1(\Omega)$ , wynika, że jest on równoważny z iloczynem

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v,$$

który bywa wygodniejszy w użyciu.

Wykażemy, że wzór na całkowanie przez części,

$$(3.10) \quad \int_{\Omega} u_{x_i} v = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i - \int_{\Omega} uv_{x_i},$$

prawdziwy dla funkcji  $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ , przenosi się na funkcje z  $H^1(\Omega)$ , jeśli wartości  $u$  i  $v$  na  $\partial\Omega$  rozumiemy w sensie ich śladu.

W tym celu funkcje  $u, v$  aproksymujemy, w sensie  $H^1$ , funkcjami  $u_n, v_n \in C^1(\bar{\Omega})$ . Z definicji śladu wynika, że obcięcia  $u_n$  i  $v_n$  do  $\partial\Omega$  są zbieżne w  $L^2(\partial\Omega)$  do śladów funkcji  $u$  i  $v$ . Wystarczy teraz podstawić we wzorze (3.10)  $u = u_n$ ,  $v = v_n$  i przejść z  $n$  do  $\infty$ .

Podobnie argumentując można wykazać, że jeśli  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $u_i \in H^1(\Omega)$ ,  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ , to

$$(3.11) \quad \int_{\Omega} v \operatorname{div} \vec{u} = \int_{\partial\Omega} v(\vec{u} \cdot \nu) - \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \nabla v.$$

**3.3. Regularność funkcji z  $H^k(\Omega)$ .** Uzasadnimy, że funkcje z  $H_{\text{loc}}^k(\Omega)$ , jeśli tylko  $k$  jest dostatecznie duże, są funkcjami różniczkowalnymi w klasycznym sensie. Dokładniej, prawdziwe jest następujące zawieranie

**Twierdzenie 3.7.**

$$(3.12) \quad H_{\text{loc}}^{l+1+[n/2]}(\Omega) \subset C^l(\Omega).$$

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy dla  $n = 2$ . W wyższym wymiarze jego idea jest taka sama, ale rachunki bardziej skomplikowane.



Zacznijmy od przypomnienia definicji *rozwiązania fundamentalnego*  $E_n(x)$  operatora Laplace'a. Dla  $n > 2$ ,

$$E_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, \quad E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}.$$

Poniższy wzór [5], [7], [9], którego dowód pomijamy, pozwala wyrazić wartość funkcji  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  w dowolnym punkcie  $x \in \Omega$  za pomocą laplasjanu tej funkcji oraz jej wartości i pochodnych na brzegu,

(3.13)

$$u(x) = \int_{\Omega} E_n(x-y)\Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial \nu_y} dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_y} E_n(x-y) dS_y.$$

Pierwszą całkę brzegową w (3.13) nazywamy *potencjałem warstwy podwójnej*, a drugą *potencjałem warstwy pojedynczej*. Dalej korzystać będziemy z tego, że potencjały te jako funkcje zmiennej  $x$  są funkcjami harmonicznymi na  $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ .

W szczególności z (3.13) wynika, że dla  $u \in C_c^2(\Omega)$  i  $n = 2$

$$(3.14) \quad u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log|x-y|\Delta u(y) dy.$$

Stąd

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\Omega} (\Delta u(y))^2 dy \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} (\log|x-y|)^2 dy \right)^{1/2} \leq C|u|_{H^2(\Omega)},$$

gdzie  $C = \sup_{x \in \Omega} \{(1/2\pi)(\int_{\Omega} (\log|x-y|)^2 dy)^{1/2}\}$ .

Wykazaliśmy, że

$$(3.15) \quad |u|_{C^0(\Omega)} \leq C|u|_{H^2(\Omega)},$$

a stała  $C$  zależy tylko od obszaru  $\Omega$ .

Jeśli  $u \in C_c^{l+2}(\Omega)$ ,  $l > 0$ , to z (3.15) wynika, że dla każdego  $\alpha$ ,  $|\alpha| < l$ , zachodzą nierówności  $|D^\alpha u|_{C^0(\Omega)} \leq C|D^\alpha u|_{H^2(\Omega)} \leq C|u|_{H^{l+2}(\Omega)}$ , a więc

$$(3.16) \quad |u|_{C^l(\Omega)} \leq C|u|_{H^{l+2}(\Omega)}.$$

Dla  $u \in H_c^{l+2}(\Omega)$ , na mocy własności (H4) i (P3), istnieje ciąg  $u_m \in C_c^{l+2}(\Omega)$  zbieżny do  $u$  w  $H^{l+2}$ , i ponadto z (3.16) dostajemy

$$|u_m - u_k|_{C^l(\Omega)} \leq C|u_m - u_k|_{H^{l+2}(\Omega)}.$$

Prawa strona powyższej nierówności zbiega do 0, gdy  $m, k \rightarrow \infty$ , a więc  $u_m$  jest ciągiem fundamentalnym w  $C^l(\bar{\Omega})$ . Stąd  $u_m$  jest zbieżny w  $C^l(\bar{\Omega})$  do pewnej funkcji  $u$ . Wykazaliśmy w ten sposób, że jeśli  $u \in H_c^{l+2}(\Omega)$ , to  $u \in C^l(\bar{\Omega})$  i  $|u|_{C^l(\bar{\Omega})} \leq C|u|_{H^{l+2}(\Omega)}$ .

Założmy, że  $u \in H_{\text{loc}}^{l+2}(\Omega)$  i  $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ . Jeśli  $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ ,  $\xi|_{\tilde{\Omega}} = 1$ , to  $\xi u \in H_c^{l+2}(\Omega)$  i  $\xi u = u$  na  $\tilde{\Omega}$ , a więc  $\xi u \in C^l(\Omega)$ . Tym samym  $u \in C^l(\Omega)$ .  $\square$

Przy odpowiednich założeniach o regularności  $\partial\Omega$  możemy Twierdzenie 3.7 wzmocnić.

**Twierdzenie 3.8.** *Jeśli  $\partial\Omega \in C^{l+1+[n/2]}$ , to  $H^{l+1+[n/2]}(\Omega) \subset C^l(\bar{\Omega})$ .*

*Dowód.* Z (H3) wynika, że funkcję  $u \in H^{l+1+[n/2]}(\Omega)$  można przedłużyć do funkcji  $U \in H_c^{l+1+[n/2]}(\tilde{\Omega})$ ,  $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$  i  $|U|_{H^{l+1+[n/2]}(\tilde{\Omega})} \leq C|u|_{H^{l+1+[n/2]}(\Omega)}$ . Stąd i z Twierdzenia 3.7 mamy  $U \in C^l(\tilde{\Omega})$ , a więc  $u \in C^l(\bar{\Omega})$  i  $|u|_{C^l(\bar{\Omega})} \leq C|u|_{H^{l+1+[n/2]}(\Omega)}$ .  $\square$

#### 4. Istnienie, jednoznaczność i regularność słabych rozwiązań

Rozpatrujemy zagadnienie brzegowe

$$(4.1) \quad -\Delta u = f,$$

$$(4.2) \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Zakładamy, że  $f \in L^2(\Omega)$  i  $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$ .

Funkcję  $u \in H^1(\Omega)$  nazywamy *słabym rozwiązaniem* równania (4.1), gdy dla każdej funkcji  $v \in H_0^1(\Omega)$  spełniona jest tożsamość:

$$(4.3) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v.$$

Jeśli dodatkowo  $u = \varphi$  na  $\partial\Omega$  (w sensie śladu), to  $u$  nazywamy *słabym rozwiązaniem* (4.1)–(4.2).

Przypomnijmy, że  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  nazywamy rozwiązaniem klasycznym zagadnienia (4.1)–(4.2), jeśli  $u$  spełnia równanie (4.1) i warunek brzegowy (4.2). Nie wymagamy aby  $\nabla u \in L^2(\Omega)$ , a więc rozwiązanie klasyczne nie musi być rozwiązaniem słabym. Oczywiście jest nim, jeśli dodatkowo  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ .

**Twierdzenie 4.1.** *Jeśli  $f \in L^2(\Omega)$  i  $\varphi \equiv 0$ , to zagadnienie (4.1)–(4.2) ma dokładnie jedno słabe rozwiązanie.*

*Dowód.* Funkcja  $f$  zadaje na  $H_0^1(\Omega)$  funkcjonal liniowy  $v \rightarrow (f, v)_{L^2(\Omega)}$ . Jego ciągłość wynika z oszacowań:

$$|(f, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Na mocy Twierdzenia Riesz istnieje dokładnie jeden element  $u \in H_0^1(\Omega)$  spełniający warunek  $(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = (f, v)_{L^2(\Omega)}$ , a tym samym  $u$  jest jedynym rozwiązaniem (4.1) z zerowym warunkiem na brzegu.  $\square$

Rozpatrzmy przypadek, gdy  $\varphi$  jest dowolnym elementem  $L^2(\partial\Omega)$ . Z definicji słabego rozwiązania  $u$  wynika, że  $\varphi = u$  na  $\partial\Omega$  w sensie śladu, a więc warunek brzegowy  $\varphi$  winien być śladem pewnej funkcji. Jeśli  $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ , to na mocy (H5)

$\varphi$  jest śladem funkcji  $\Phi \in C^1(\overline{\Omega})$ . Podkreślmy, że ciągłość  $\varphi$  nie jest warunkiem wystarczającym, aby była ona śladem pewnej funkcji z  $H^1(\Omega)$ . Istnieje przykład funkcji ciągłej na okręgu, która nie jest śladem żadnej funkcji z  $H^1(K(0,1))$  ([3]).

Założmy, że istnieje  $\Phi \in H^1(\Omega)$ , której śladem jest  $\varphi$ . Wprowadźmy funkcję niewiadomą  $\tilde{u} = u - \Phi$ .

Jeśli  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$ , to  $\Phi \in C^2(\overline{\Omega})$  i  $\tilde{u}$  spełnia

$$(4.4) \quad -\Delta\tilde{u} = f + \Delta\Phi, \tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Z poprzednich rozważań wnioskujemy istnienie jedyne rozwiązanie  $\tilde{u}$  zagadnienia (4.4).

Przejdźmy do przypadku ogólnego: zakładamy, że  $\Phi \in H^1(\Omega)$  i szukamy funkcji  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  spełniającej tożsamość

$$(4.5) \quad \int_{\Omega} \nabla\tilde{u} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} \nabla\Phi \cdot \nabla v$$

dla każdego  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Wykażemy, że prawa strona (4.5) definiuje funkcjonal liniowy ciągły na  $H_0^1(\Omega)$ ,  $k(v) := \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} \nabla\Phi \cdot \nabla v$ . Zauważmy bowiem, że

$$|k(v)| \leq |f|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} + |\nabla\Phi|_{L^2(\Omega)} |\nabla v|_{L^2(\Omega)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega)} + |\Phi|_{H^1(\Omega)}) |v|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Na mocy Twierdzenia Riesz istnieje dokładnie jeden element  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  taki, że  $(\tilde{u}, v)_{H_0^1(\Omega)} = k(v)$  i  $|\tilde{u}|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega)} + |\Phi|_{H^1(\Omega)})$ . Zakładając, że  $\partial\Omega \in C^1$ , ostatnią nierówność można zapisać w postaci

$$(4.6) \quad |\tilde{u}|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega)} + |\varphi|_{C^1(\partial\Omega)}),$$

a ogólnie

$$(4.7) \quad |\tilde{u}|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\Phi|_{\partial\Omega}=\varphi} |\Phi|_{H^1(\Omega)}).$$

Jednoznaczność słabych rozwiązań zagadnienia (4.1)–(4.2) jest natychmiastową konsekwencją jednoznaczności rozwiązań zagadnienia z jednorodnym warunkiem brzegowym. Gdyby bowiem istniały dwa rozwiązania  $u_1, u_2$ , to ich różnica  $u = u_1 - u_2$  spełniałaby  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , a więc  $u \equiv 0$ . Wykazaliśmy w ten sposób

**Twierdzenie 4.2.** *Jeśli  $f \in L^2(\Omega)$  i  $\varphi$  jest śladem pewnej funkcji  $\Phi \in H^1(\Omega)$ , to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie  $u$  zagadnienia (4.1)–(4.2).*

**4.1. Regularność słabych rozwiązań.** Z definicji, słabe rozwiązanie  $u$  należy do przestrzeni  $H^1(\Omega)$ . Wykażemy, że odpowiednie założenia o regularności  $f$  gwarantują wyższą regularność  $u$ .

Zacznijmy od przypadku jednowymiarowego

$$(4.8) \quad -u'' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Kładąc w Twierdzeniu 3.8  $n = 1$ ,  $l = 0$  dostajemy zawieranie  $H^1((0, 1)) \subset C^0([0, 1])$ , czyli słabe rozwiązanie  $u$  zagadnienia (4.8) jest ciągłe. Z definicji spełnia też tożsamość

$$(4.9) \quad \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \quad \text{dla } v \in H_0^1((0, 1)).$$

**Twierdzenie 4.3.** *Jeśli  $f \in C^0([0, 1])$  i  $u$  jest słabym rozwiązaniem (4.8), to  $u \in C^2([0, 1])$  i spełnia (4.8) w klasycznym sensie.*

*Dowód.* Funkcja  $\tilde{u} := -\int_0^x \int_0^y f(\xi) d\xi dy$  jest klasy  $C^2([0, 1])$  i  $-\tilde{u}'' = f$ , a więc spełnia tożsamość (4.9). Oczywiście jeśli  $u_1 = u - \tilde{u}$ , to  $\int_0^1 u_1'v' = 0$  dla  $v \in H_0^1((0, 1))$ . Wynika stąd, że  $(u_1')' = 0$  (' rozumiemy tutaj w sensie słabej pochodnej), a więc  $u_1'$  jest stała (Uwaga 3.5) i tym samym  $u \in C^2([0, 1])$ . Z tożsamości  $\int_0^1 u'v' = -\int_0^1 u''v = \int_0^1 fv$  wynika, że  $-u'' = f$ , tzn. słabe rozwiązanie  $u$  spełnia równanie w klasycznym sensie.  $\square$

Przejdźmy do badania regularności słabych rozwiązań w wyższych wymiarach.

**Twierdzenie 4.4.** *Zakładamy, że  $f \in L^2(\Omega) \cap H_{\text{loc}}^k(\Omega)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  i  $u$  jest słabym rozwiązaniem (4.1). Wtedy  $u \in H_{\text{loc}}^{k+2}(\Omega)$  i dla każdej pary obszarów  $\Omega^1 \subset\subset \Omega^2 \subset\subset \Omega$  istnieje taka stała  $C = C(\Omega^1, \Omega^2)$ , że*

$$(4.10) \quad |u|_{H^{k+2}(\Omega^1)} \leq C(|f|_{H^k(\Omega^2)} + |u|_{H^1(\Omega^2)}).$$

*Dowód.* Dowód przebiega indukcyjnie. Załóżmy, że  $k = 0$ , tzn.  $f \in L^2(\Omega)$ . Oznaczmy  $\varepsilon = \text{dist}(\partial\Omega^1, \partial\Omega^2)$  i  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ . Niech  $\xi$  będzie taką funkcją klasy  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , że  $\xi(x) = 1$  na  $\Omega_\varepsilon^2$  i  $\xi(x) = 0$  dla  $x \notin \Omega_{2\varepsilon/3}^2$ . Jeśli  $v_0 \in H^1(\Omega^2)$ , to  $\xi v_0 = v \in H_0^1(\Omega)$ . Rozumiemy tutaj, że  $v_0(x) = 0$  dla  $x \notin \Omega^2$ . W tożsamości (4.3) kładziemy  $v = \xi v_0$ . Korzystając z równości

$$\nabla u \cdot \nabla v = (\nabla u \cdot \nabla \xi)v_0 + \nabla(\xi u) \cdot \nabla v_0 - u \nabla \xi \cdot \nabla v_0,$$

to samo (4.3) można zapisać w postaci

$$(4.11) \quad \int_{\Omega^2} \nabla U \cdot \nabla v_0 = \int_{\Omega^2} F v_0 + \int_{\Omega^2} u \nabla \xi \cdot \nabla v_0,$$

gdzie  $F = f\xi - \nabla u \cdot \nabla \xi \in L^2(\Omega^2)$  i  $U = \xi u \in H^1(\Omega^2)$ . Ponieważ  $\xi$  zeruje się poza  $\Omega_{2\varepsilon/3}^2$ , to całkowanie w (4.11) przebiega po  $\Omega_{2/3\varepsilon}^2$ .

Niech  $v_1$  będzie funkcją z  $H^1(\Omega^2)$  przedłużoną zerem poza  $\Omega^2$ . Dla  $|h| < \varepsilon/2$ ,  $D_{-h}^i v_1 \in H^1(\Omega_{\varepsilon/2}^2) \cap L^2(\Omega_{\varepsilon/2}^2)$ . Podstawiając w (4.11)  $v_0 = D_{-h}^i v_1$  i wykorzystując wzór (3.6) dostaniemy

$$(4.12) \quad \int_{\Omega^2} \nabla D_h^i U \cdot \nabla v_1 = - \int_{\Omega^2} F D_{-h}^i v_1 + \int_{\Omega^2} D_h^i(u \nabla \xi) \cdot \nabla v_1.$$

Stąd i z (3.7)

$$\left| \int_{\Omega^2} \nabla D_h^i U \cdot \nabla v_1 \right| \leq (|F|_{L^2(\Omega^2)} + C|u|_{H^1(\Omega^2)}) |\nabla v_1|_{L^2(\Omega^2)}.$$

Z oszacowania

$$|F|_{L^2(\Omega^2)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega^2)} + |u|_{H^1(\Omega^2)}),$$

otrzymujemy

$$(4.13) \quad \left| \int_{\Omega^2} \nabla D_h^i U \cdot \nabla v_1 \right| \leq C(|f|_{L^2(\Omega^2)} + |u|_{H^1(\Omega^2)}) |\nabla v_1|_{L^2(\Omega^2)}.$$

Podstawiając w (4.13)  $v_1 = D_h^i U$  mamy

$$\int_{\Omega^2} |\nabla v_1|^2 \leq C(|f|_{L^2(\Omega^2)} + |u|_{H^1(\Omega^2)}) |\nabla v_1|_{L^2(\Omega^2)}.$$

Stąd

$$|\nabla v_1|_{L^2(\Omega^2)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega^2)} + |u|_{H^1(\Omega^2)}).$$

Z powyższej nierówności wynika, że rodzina  $\nabla D_h^i U$  jest jednostajnie ograniczona w  $L^2(\Omega^2)$ , a więc na mocy Twierdzenia 3.6,  $U \in H^2(\Omega^2)$  oraz

$$(4.14) \quad |\nabla U|_{L^2(\Omega^2)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega^2)} + |u|_{H^1(\Omega^2)}).$$

Przypomnijmy, że  $U = u$  na  $\Omega^1$ , stąd  $u \in H^2(\Omega^1)$ , a tym samym  $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . Korzystając z nierówności Poincarégo i (4.14) dostajemy oszacowanie

$$|u|_{H^2(\Omega^1)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega^2)} + |u|_{H^1(\Omega^2)}).$$

W ten sposób zakończyliśmy dowód pierwszego kroku indukcji.

Załóżmy teraz, że jeśli  $f \in L^2(\Omega) \cap H_{\text{loc}}^k(\Omega)$ , to  $u \in H_{\text{loc}}^{k+2}(\Omega)$ ,

$$|u|_{H^{k+2}(\Omega^1)} \leq C(k, \Omega^1, \Omega^2) (|f|_{H^k(\Omega^2)} + |u|_{H^1(\Omega^2)})$$

oraz zachodzi tożsamość

$$(4.15) \quad \int_{\Omega^2} \nabla D_h^i (D^\alpha U) \cdot \nabla v_{k+1} = - \int_{\Omega^2} D^\alpha F D_{-h}^i v_{k+1} + \int_{\Omega^2} D_h^i (D^\alpha (u \nabla \xi)) \cdot \nabla v_{k+1}$$

dla każdej funkcji  $v_{k+1} \in H^1(\Omega^2)$  i  $|\alpha| \leq k$ .

Jeśli teraz  $f \in L^2(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$  i  $|\alpha| \leq k$ , to  $D^\alpha U \in H^2(\Omega^2)$  i  $D^\alpha F \in H^1(\Omega^2)$ . Przechodząc w (4.15) z  $h \rightarrow 0$ , dostajemy

$$\int_{\Omega^2} \nabla D^\alpha U_{x_i} \cdot \nabla v_{k+1} = - \int_{\Omega^2} D^\alpha F (v_{k+1})_{x_i} + \int_{\Omega^2} D^\alpha (u \nabla \xi)_{x_i} \cdot \nabla v_{k+1}.$$

Niech  $v_{k+2} \in H^1(\Omega^2)$ . Kładąc  $v_{k+1} = D_{-h}^i v_{k+2}$  otrzymamy

$$\int_{\Omega^2} \nabla D_h^i (D^\alpha U_{x_i}) \cdot \nabla v_{k+2} = - \int_{\Omega^2} D^\alpha F_{x_i} D_{-h}^i v_{k+2} + \int_{\Omega^2} D_h^i (D^\alpha (u \nabla \xi)_{x_i}) \cdot \nabla v_{k+2}.$$

Z założenia indukcyjnego

$$|F|_{H^{k+1}(\Omega^2)} \leq C(|f|_{H^{k+1}(\Omega^2)} + |u|_{H^{k+2}(\Omega^2)}) \leq C(|f|_{H^{k+1}(\Omega^2)} + |u|_{H^1(\Omega^2)}).$$

Podstawiając  $v_{k+2} = D_h^i(D^\alpha U_{x_i})$ , rozumując jak w kroku pierwszym, wnioskujemy, że  $u \in H_{\text{loc}}^{k+3}(\Omega)$ .  $\square$

**Uwaga 4.5.** Jeśli  $f \in L^2(\Omega)$  i  $u \in H^1(\Omega)$  jest rozwiązaniem (4.1), to  $u$  spełnia równanie Poissona prawie wszędzie.

*Dowód.* Z Twierdzenia 4.4 wynika, że  $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ , czyli  $\Delta u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . Niech  $\Omega^1 \subset\subset \Omega$  i  $v \in H_0^1(\Omega^1)$ . Z (4.3) dostaniemy tożsamość

$$-\int_{\Omega^1} \Delta u v = \int_{\Omega^1} f v \quad \text{dla } v \in H_0^1(\Omega^1).$$

Stąd  $\int_{\Omega^1} (\Delta u + f)v = 0$ , co pociąga  $-\Delta u = f$  prawie wszędzie w  $\Omega$ .  $\square$

Stosując podobne idee jak w dowodzie Twierdzenia 4.4, można wykazać ([2], [3], [7]) regularność rozwiązań aż do brzegu.

**Twierdzenie 4.6.** *Jeśli  $f \in H^k(\Omega)$ ,  $\partial\Omega \in C^{k+2}$ ,  $k \geq 0$ , to słabe rozwiązanie  $u$  zagadnienia  $\Delta u = f$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  jest w  $H^{k+2}(\Omega)$ ,  $|u|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C|f|_{H^k(\Omega)}$  i stała  $C$  nie zależy od  $f$ .*

Zauważmy, że z Twierdzeń 4.4 i 3.8 wynika

**Twierdzenie 4.7.** *Jeśli  $f \in H^{1+[n/2]}(\Omega)$  i  $\partial\Omega \in C^{3+[n/2]}$ , to słabe rozwiązanie równania (4.1) z jednorodnym warunkiem brzegowym jest rozwiązaniem klasycznym.*

Rozpatrzmy teraz zagadnienie (4.1)–(4.2) w całej ogólności, tzn. zakładamy, że  $\varphi$  jest śladem pewnej funkcji  $\Phi \in H^{k+2}$  (aby to zagwarantować, w myśl (H5) wystarczy, że  $\varphi \in C^{k+2}(\partial\Omega)$ ) i  $f \in H^k(\Omega)$ .

Wprowadźmy funkcję pomocniczą  $w = u - \Phi$ . Oczywiście dla  $v \in H_0^1(\Omega)$   $\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v = \int_{\Omega} F_1 v$ , gdzie  $F_1 = f + \Delta\Phi$ . Funkcja  $w$  spełnia jednorodny warunek brzegowy i  $F_1 \in H^k(\Omega)$ , a więc z Twierdzenia 4.6  $w \in H^{k+2}(\Omega)$ . Wykazaliśmy w ten sposób

**Twierdzenie 4.8.** *Jeśli  $f \in H^k(\Omega)$  i  $\varphi$  jest śladem funkcji z  $H^{k+2}(\Omega)$ , to rozwiązanie  $u$  zagadnienia (4.1)–(4.2) należy do  $H^{k+2}(\Omega)$ .*

## 5. Klasyczne rozwiązania równania Poissona

Będziemy rozpatrywać klasyczne rozwiązania zagadnienia (4.1)–(4.2). Warunki na  $f$  i  $\partial\Omega$  gwarantujące istnienie klasycznych rozwiązań podane są w Twierdzeniu 4.7. Udowodnimy, że istnieją rozwiązania klasyczne przy znacznie słabszych założeniach o  $\partial\Omega$ ,  $f$  i  $\varphi$ . Zaczniemy od tzw. zasad maksimum, które są podstawowym narzędziem analizy rozwiązań równań eliptycznych.

**5.1. Zasady maksimum.** Udowodnimy prosty pomocniczy

**Lemat 5.1.** *Jeśli  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  i  $\Delta u > 0$ , to maksimum funkcji  $u$  nie może być osiągnięte w  $\Omega$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że maksimum funkcji  $u$  przyjęte jest w punkcie  $x_0 \in \Omega$ . Wtedy  $\Delta u(x_0) \leq 0$ , co jest sprzeczne z naszym założeniem.  $\square$

Poniższy lemat nosi nazwę *słabej zasady maksimum*.

**Lemat 5.2.** *Jeśli  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  i  $\Delta u \geq 0$ , to  $u$  osiąga maksimum na  $\partial\Omega$ .*

*Dowód.* Wprowadzamy funkcję pomocniczą  $w(x) = u + \varepsilon e^{x_1}$ ,  $x_1$  oznacza pierwszą współrzędną punktu  $x$  i  $\varepsilon > 0$ . Oczywiście  $\Delta w = \Delta u + \varepsilon e^{x_1} > 0$ . Funkcja  $w$  osiąga maksimum na  $\partial\Omega$  i na mocy poprzedniego lematu

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) < \sup_{x \in \Omega} w(x) \leq \sup_{x \in \partial\Omega} w(x) \leq \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) + \varepsilon \sup_{x \in \partial\Omega} e^{x_1}.$$

Przechodząc z  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostajemy  $\sup_{x \in \Omega} u(x) \leq \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$ .  $\square$

Ze słabej zasady maksimum wynikają natychmiast dwa wnioski.

**Wniosek 5.3.** *Funkcja harmoniczna i ciągła w  $\bar{\Omega}$  osiąga swoje kresy na  $\partial\Omega$ .*

**Wniosek 5.4.** *Zagadnienie (4.1)–(4.2) ma co najwyżej jedno klasyczne rozwiązanie.*

Poniższy lemat odgrywa tutaj pomocniczą rolę przy dowodzie mocnej zasady maksimum, ale poza tym znajduje wiele zastosowań.

**Lemat 5.5** (E. Hopf). *Zakładamy, że  $K := K_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x^0 \in \partial K$ ,  $u \in C^2(K) \cap C(K \cup \{x^0\})$ ,  $\Delta u \geq 0$  oraz  $u(x) < u(x^0)$  dla  $x \in K$ . Wtedy dla takiego wektora  $n$ , że  $n \cdot \nu(x^0) > 0$  ( $\nu(x^0)$  wektor normalny zewnętrzny do  $\partial\Omega$  w punkcie  $x^0$ ) zachodzi nierówność*

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [u(x^0) - u(x^0 - tn)] > 0.$$

*W szczególności, jeśli  $u \in C^1(K \cup \{x^0\})$ , to  $\partial u / \partial n > 0$ .*

*Dowód.* Bez zmniejszania ogólności, możemy założyć, biorąc ewentualnie kulę o mniejszym promieniu, że  $K = K_R(0)$ ,  $u(x) < u(x^0)$  dla  $x \in \bar{K} - \{x^0\}$  i  $u \in C^0(\bar{K})$ . Wprowadzamy funkcję pomocniczą  $w(x) = u(x) + \varepsilon h(x)$ , gdzie  $h(x) = e^{-|x|^2} - e^{-R^2} \geq 0$ . Oznaczmy  $\Sigma = K \cap K_{R/2}(x^0)$  i zauważmy, że  $\Delta w > 0$  na  $\Sigma$ . Wynika stąd, że  $w$  nie może osiągać maksimum na  $\Sigma$ . Dowodzimy, że dla dostatecznie małych  $\varepsilon$ ,  $w$  osiąga maksimum w  $x^0$ . Na  $\Sigma \cap \partial K$   $h(x) = 0$ , a więc  $w(x) < w(x^0)$  i dla  $x \in \partial\Sigma \cap K$   $u(x) < u(x^0)$ . Jeśli dobierzemy  $\varepsilon$  dostatecznie małe, to taka sama nierówność będzie zachodzić dla funkcji  $w$ .

W rezultacie

$$\frac{w(x^0) - w(x^0 - tn)}{t} \geq 0,$$

dla dostatecznie małych dodatnich  $t$ . Przechodząc z  $t \rightarrow 0$  dostajemy

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{u(x^0) - u(x^0 - tn)}{t} \geq -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial n}(x^0) > 0,$$

bo  $\partial h / \partial n < 0$ . □

Jak wspomnieliśmy, wnioskiem z Lematu Hopfa jest

**Twierdzenie 5.6** (mocna zasada maksimum). *Jeśli  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ ,  $\Delta u \geq 0$  i  $u$  przyjmuje maksimum w  $\Omega$ , to  $u$  jest funkcją stałą.*

*Dowód.* Połóżmy  $Q = \{x \in \Omega : u(x) = \sup_{y \in \Omega} u(y)\}$ .  $Q$  jest zbiorem domkniętym w  $\Omega$ . Mamy wykazać, że jest pusty lub pokrywa się z  $\Omega$ . Załóżmy, że jest właściwym podzbiorem  $\Omega$ . Istnieje wtedy taka kula  $K$ , że  $K \subset \Omega \setminus Q$  i  $\partial K \cap Q \neq \emptyset$ . Jeśli  $x_0 \in \partial K \cap Q$ , to  $u(x_0) > u(x)$  dla  $x \in K$ . Stąd, na mocy Lematu Hopfa pochodna w kierunku wektora  $\nu$  normalnego do  $\partial K$  w punkcie  $x_0$  jest dodatnia,  $(\partial u / \partial \nu)(x_0) = \nabla u(x_0) \cdot \nu > 0$ , co przeczy temu, że  $x_0 \in Q$ , a więc  $\nabla u(x_0) = 0$ . □

Mocna zasada maksimum pozwala oszacować rozwiązanie przez jego wartości na brzegu oraz prawą stronę równania.

**Wniosek 5.7.** *Jeśli  $f \in C^0(\bar{\Omega})$ ,  $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$  i  $u$  jest klasycznym rozwiązaniem (4.1)–(4.2), to*

$$(5.1) \quad |u(x)| \leq \max |\varphi| + C \max |f|.$$

*Dowód.* Możemy założyć, że  $\Omega \subset \{x : 0 \leq x_1 \leq d\}$ . Kładziemy  $w(x) = M + (e^{\beta d} - e^{\beta x_1})F$ , gdzie  $M = \max |\varphi|$ ,  $F = \max |f|$ . Dla dostatecznie dużych  $\beta$ ,  $\Delta(w+u) = \Delta w + \Delta u = -\beta^2 e^{\beta x_1} F - f < 0$ , a na  $\partial\Omega$ ,  $w+u = w+\varphi \geq 0$ . Z zasady maksimum  $-w \leq u$ . Przeprowadzając podobne rozumowanie dla funkcji  $w - u$ , dostajemy  $u \leq w$ . W rezultacie  $-w \leq u \leq w$ , a więc spełniona jest nierówność (5.1). □

**5.2. Istnienie rozwiązań klasycznych.** Zaczniemy od twierdzenia, które mówi, że dla dostatecznie regularnych warunków brzegowych istnieją funkcje harmoniczne spełniające te warunki. W dowodzie wykorzystamy

**Lemat 5.8.** *Jeśli  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  i  $U$  jest potencjałem objętościowym związanym z  $f$ , to  $U \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  i  $U$  spełnia równanie  $\Delta U = f$ .*

*Dowód.* Przypomnijmy, że potencjałem objętościowym funkcji  $f$  nazywamy funkcję  $U$  zadaną wzorem

$$U(x) = \int_{\Omega} E_n(x-y)f(y) dy.$$



Korzystając z mierzalności i ograniczoności  $f$  łatwo wykazać, że  $U \in C^1(\overline{\Omega})$  oraz

$$(5.2) \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial y_i} f(y) dy.$$

Jeśli  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ , to ze wzoru (1.3) dostajemy

$$(5.3) \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} = \int_{\Omega} E_n(x-y) \frac{\partial f}{\partial y} dy - \int_{\partial\Omega} E_n(x-y) f(y) \nu_i(y) dS_y.$$

Pierwsza całka w (5.3) jest potencjałem objętościowym funkcji  $\partial f/\partial y \in C^0(\overline{\Omega})$ , a więc, jako funkcja  $x$ , należy do  $C^1(\overline{\Omega})$ . Druga jako potencjał warstwy pojedynczej jest gładka. Wynika stąd, że  $U \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ . Niech  $v$  będzie dowolną funkcją z  $C_c^2(\Omega)$ . Wykorzystując (3.13) dostajemy

$$(5.4) \quad v(x) = \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta v(y) dy.$$

Stosując teraz wzory Greena i twierdzenie Fubinię oraz (5.4) otrzymujemy

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} v(x) \Delta U(x) dx &= \int_{\Omega} \Delta v(x) U(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \Delta v(x) \left( \int_{\Omega} E_n(x-y) f(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\Omega} v(y) f(y) dy. \end{aligned}$$

W ten sposób wykazaliśmy, że

$$\int_{\Omega} v(x) (\Delta U(x) - f(x)) dx = 0 \quad \text{dla każdej } v \in C_c^2(\Omega).$$

Stąd natychmiast wynika, że  $\Delta U = f$ .  $\square$

**Twierdzenie 5.9.** *Jeśli  $\partial\Omega \in C^2$ , to istnieje funkcja  $u$  harmoniczna na  $\Omega$  i ciągła na  $\overline{\Omega}$  przyjmująca zadane wartości  $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$  na  $\partial\Omega$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że  $\partial\Omega \in C^\infty$ . Istnieje wtedy ciąg  $\varphi_n \in C^\infty(\partial\Omega)$  zbieżny w  $C^0$  do  $\varphi$ . Dla takich  $\varphi_n$ , na mocy Twierdzeń 4.7 i 4.8, istnieją funkcje harmoniczne  $u_n \in C^0(\overline{\Omega})$  spełniające warunek brzegowy  $u_n|_{\partial\Omega} = \varphi_n$ . Z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych  $|u_n - u_m| \leq |\varphi_n - \varphi_m|$ , a więc  $u_n$  zbiega jednostajnie na  $\overline{\Omega}$  do pewnej funkcji  $u$ , która jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji harmonicznych jest też harmoniczna.

Oznaczmy przez  $\Phi$  ciągłe rozszerzenie  $\varphi$  na  $\overline{\Omega}$ , a przez  $M = \max_{x \in \overline{\Omega}} |\Phi(x)|$ . Niech  $\Omega_i \subset \Omega$  będzie wstępującym ciągiem zbiorów otwartych, o brzegach klasy  $C^\infty$ , wypełniających w sumie  $\Omega$ ,  $\bigcup \Omega_i = \Omega$ . Jak wykazaliśmy wyżej, dla każdego  $\Omega_i$  istnieje ciąg funkcji harmonicznych  $u_{i,m}$  zbieżny na  $\overline{\Omega}_i$  do funkcji harmonicznej  $u_i$  spełniającej warunek brzegowy  $u_i|_{\partial\Omega_i} = \Phi$ . Z ciągu  $u_{i,2}$  wybieramy podciąg zbieżny  $u_{i_k,2}$  na  $\overline{\Omega}_1$ , dalej z  $u_{i_k,3}$  wybieramy podciąg zbieżny na  $\overline{\Omega}_2$ ,

i.t.d. Ciąg  $u_{i,i}$ , jak wynika z jego konstrukcji, jest zbieżny na  $\Omega$  do pewnej funkcji harmonicznej  $u$ . Pozostaje wykazać, że  $u \in C(\bar{\Omega})$  i  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ . Dopiero teraz wykorzystamy założenie  $\partial\Omega \in C^2$ . Dowód dla wygody zapisu przeprowadzimy dla  $n > 2$ , na przypadek  $n = 2$  przenosi się on w naturalny sposób. Wybieramy dowolny punkt  $x_0 \in \partial\Omega$  i chcemy wykazać, że  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \Phi(x_0)$ .  $\Phi$  jest funkcją ciągłą, a więc dla zadanego  $\varepsilon$  istnieje takie  $\delta$ , że  $|\Phi(x) - \Phi(x_0)| < \varepsilon$  dla  $|x - x_0| < \delta$ . Niech  $K_r(x_1)$  będzie kulą styczną zewnętrznie do  $\partial\Omega$  w punkcie  $x_0$ . Funkcja  $w(x) = r^{2-n} - |x - x_1|^{2-n}$  jest harmoniczna dla  $x \neq x_1$  i  $w(x) \geq 0$  dla  $x \in \bar{\Omega}$ . Dobieramy stałą  $C$  tak aby,

$$\Phi(x_0) - \varepsilon - Cw(x) \leq \Phi \leq \Phi(x_0) + \varepsilon + Cw(x)$$

dla  $x \in \bar{\Omega}$ . Funkcje  $u_{i,i}(x) + Cw(x)$  i  $u_{i,i}(x) - Cw(x)$  są harmoniczne w  $\Omega_i$ , ciągle na  $\bar{\Omega}_i$  oraz

$$\begin{aligned} (u_{i,i} + Cw)|_{\partial\Omega} &= (\Phi + Cw)|_{\partial\Omega} > \Phi(x_0) - \varepsilon, \\ (u_{i,i} - Cw)|_{\partial\Omega} &= (\Phi - Cw)|_{\partial\Omega} < \Phi(x_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Stąd na mocy zasady maksimum  $u_{i,i}(x) + Cw(x) > \Phi(x_0) - \varepsilon$  i  $u_{i,i}(x) - Cw(x) > \Phi(x_0) + \varepsilon$ . W rezultacie dostajemy oszacowanie

$$\Phi(x_0) - \varepsilon - Cw(x) \leq u(x) \leq \Phi(x_0) + \varepsilon + Cw(x)$$

dla  $x \in \Omega_i$ . Przechodząc teraz z  $i \rightarrow \infty$ , a następnie z  $x \rightarrow x_0$ , otrzymujemy

$$\Phi(x_0) - \varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq \Phi(x_0) + \varepsilon,$$

a stąd  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \Phi(x_0)$ .  $\square$

Przejdźmy do problemu istnienia rozwiązania równania Poissona (4.1) z niejednorodnym warunkiem brzegowym (4.2).

**Twierdzenie 5.10.** *Jeśli  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  i  $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ , to zagadnienie (4.1)–(4.2) ma klasyczne rozwiązanie.*

*Dowód.* Na mocy Lematu 5.8  $U(x) = -\int_{\Omega} E_n(x-y)f(y) dy$  jest klasycznym rozwiązaniem (4.1) i  $U \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ . Z poprzedniego twierdzenia wynika istnienie funkcji harmonicznej  $v \in C^0(\bar{\Omega})$  spełniającej warunek brzegowy  $v|_{\partial\Omega} = \varphi - U$ . Oczywiście  $u = U + v$  jest klasycznym rozwiązaniem naszego problemu.  $\square$

**5.3. Funkcja Greena.** Oznaczmy przez  $\gamma(x, y)$  funkcję dwóch zmiennych spełniającą następujące warunki:

- $\gamma(x, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,
- $\Delta_y \gamma(x, y) = 0$  dla  $y \in \Omega$ ,
- $\gamma(x, y) = E_n(x - y)$  dla  $y \in \partial\Omega$ .

Istnienie funkcji  $\gamma$  jest gwarantowane Twierdzeniem 4.8 i odpowiednimi założeniami o regularności  $\partial\Omega$ .

**Definicja 5.11.** Funkcję  $G(x, y) = -E_n(x - y) + \gamma(x, y)$  nazywamy funkcją Greena dla operatora Laplace'a

W interpretacji fizycznej  $G(x, y)$  jest potencjałem elektrycznym w punkcie  $y$  wytworzonym przez ładunek jednostkowy umieszczony w punkcie  $x$ . Warunek trzeci w definicji oznacza, że brzeg obszaru  $\Omega$  został uziemiony.

Jeśli  $u$  jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (4.1)–(4.2) i  $f \in C^0(\bar{\Omega})$ , to

$$(5.6) \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) dS_y.$$

Odwrotnie, można też wykazać [2], [3], że jeśli  $u$  dana jest wzorem (5.6) i  $f$  spełnia warunek Höldera to  $u$  jest rozwiązaniem (4.1)–(4.2).

W dalszej części, w dowodach istnienia rozwiązań zagadnień nieliniowych wykorzystywać będziemy oszacowania funkcji Greena.

**Twierdzenie 5.12.** *Prawdziwe są następujące oszacowania funkcji Greena i jej pochodnych:*

- (a)  $0 < G_2(x, y) < -E_2(x - y) + (1/2\pi) \log \text{diam } \Omega$ ,
- (b)  $0 < G_n(x, y) < -E_n(x - y)$  dla  $n > 2$ ,
- (c)  $|\nabla G_n| < C/|x - y|^{n-1}$ , gdzie stała  $C$  zależy tylko od obszaru  $\Omega$ .

*Dowód.* Ograniczymy się tylko do dowodu pierwszych dwóch nierówności. Dowód oszacowań pochodnych jest znacznie trudniejszy ([8]).

Ustalmy  $x \in \Omega$  i oznaczmy  $G(y) = G(x, y)$ . Z definicji funkcji Greena wynika, że  $G(y) \rightarrow \infty$ , gdy  $y \rightarrow x$ . Istnieje więc takie  $r > 0$ , że  $G(y) > 0$  w  $K_r(x)$ .  $G$  jest harmoniczna w  $\Omega \setminus K_r(x)$ ,  $G|_{\partial\Omega} = 0$  i  $G|_{\partial K_r(x)} > 0$ . Z zasady maksimum wynika, że  $G(y) > 0$  w  $\Omega \setminus K_r(x)$ , a tym samym  $G > 0$  w  $\Omega$ . Z zasady maksimum wynika też, że jeśli  $n > 2$ , to  $\gamma(x, \cdot) < 0$  w  $\Omega$ . Dostaliśmy tym samym oszacowanie (b).

Dla  $n = 2$ ,  $E_2(x - y) \leq (1/2\pi) \log \text{diam } \Omega$  dla  $y \in \partial\Omega$ , a więc z zasady maksimum  $\gamma < (1/2\pi) \log \text{diam } \Omega$ . Skąd natychmiast wynika (a).  $\square$

## 6. Nieliniowe równania Poissona

Zajmiemy się zagadnieniem postaci

$$(6.1) \quad -\Delta u = f(u),$$

$$(6.2) \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Poniższy przykład wskazuje, że założenia regularności funkcji  $f$  nie gwarantują istnienia rozwiązania problemu (6.1)–(6.2).

**Przykład 6.1.** Rozpatrzmy zagadnienie

$$(6.3) \quad -\Delta u = \lambda e^u, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

$$(6.4) \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Niech  $u_1$ ,  $\lambda_1$  będą odpowiednio pierwszą funkcją własną i pierwszą wartością własną  $-\Delta$  w obszarze  $\Omega$ . Wiadomo [2], że  $u_1 > 0$  na  $\Omega$  i  $\lambda_1 > 0$ . Mnożymy równanie (6.3) przez  $u_1$  i całkujemy po obszarze  $\Omega$ . Dostajemy

$$-\int_{\Omega} \Delta u u_1 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_1 = -\int_{\Omega} u \Delta u_1 = \lambda_1 \int_{\Omega} u u_1 = \lambda \int_{\Omega} e^u u_1 > \lambda \int_{\Omega} u u_1.$$

Stąd  $(\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} u u_1 > 0$ , a więc  $\lambda < \lambda_1$ . Wykazaliśmy w ten sposób, że dla  $\lambda \geq \lambda_1$  nasze zagadnienie nie ma rozwiązań.

Z pomocą funkcji Greena zagadnienia różniczkowe (6.1)–(6.2) możemy sprowadzić do równania całkowego

$$(6.5) \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(u(y)) dy.$$

Prawą stroną (6.5) definiuje operator  $w \rightarrow \int_{\Omega} G(x, y) f(w(y)) dy$  działający na pewnej przestrzeni funkcyjnej  $X$ . Istnienie rozwiązania (6.5) sprowadza się w ten sposób do znalezienia punktu stałego tego operatora. Problem polega na odpowiednim doborze przestrzeni  $X$  i zastosowaniu jednego z twierdzeń o punkcie stałym. Użyteczna dla nas będzie wersja Twierdzenia Leraya–Schaudera, znana też jako Twierdzenie Schaefera.

**Twierdzenie 6.2.** *Zakładamy, że odwzorowanie  $T$  przestrzeni Banacha  $X$  jest ciągle i zwarte oraz zbiór*

$$\{u \in X : u = \lambda T(u) \text{ dla pewnego } \lambda \in [0, 1]\}$$

*jest ograniczony. Wtedy  $T$  ma punkt stały.*

Zastosujmy ją do dowodu następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 6.3.** *Jeśli  $f$  jest funkcją nieujemną, ciągłą i malejącą, to zagadnienie (6.1)–(6.2) ma dokładnie jedno klasyczne rozwiązanie.*

*Dowód.* Przestrzenią  $X$ , w której będziemy pracować, jest przestrzeń funkcji ciągłych na  $\bar{\Omega}$ ,  $X = C^0(\bar{\Omega})$ . Z ciągłości  $f$  wynika natychmiast ciągłość operatora  $T(w)(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(w(y)) dy$ . Jego zwartość jest konsekwencją Twierdzenia Arzèli–Ascoliego oraz oszacowań na pochodne funkcji Greena. Istotnie, zauważmy, że jeśli  $A \subset X$  jest podzbiorem ograniczonym, to  $\sup_{w \in A} |\nabla T(w)| \leq C \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} dy \leq C$ , a więc obraz  $T(A)$  składa się z funkcji wspólnie ograniczonych i jednakowo ciągłych.

Pozostaje do wykazania oszacowanie *a priori* rozwiązań równania  $u = \lambda T(u)$ . Jeśli  $u_{\lambda} = T(u_{\lambda})$ , to  $0 \leq u_{\lambda}(x) \leq \lambda \int_{\Omega} |G(x, y)| f(0) dy \leq C(\Omega, f)$ , co daje potrzebne oszacowanie na możliwe rozwiązania.

Twierdzenie Schaefera nie gwarantuje jednoznaczności rozwiązań. Załóżmy więc istnienie dwóch rozwiązań  $u$  i  $v$ . Ich różnica spełnia równanie  $-\Delta(u - v) =$

$f(u) - f(v)$ . Mnożymy je obustronnie przez  $u - v$  i całkujemy po  $\Omega$ . Dostajemy  $\int_{\Omega} |\nabla(u - v)|^2 = \int_{\Omega} (f(u) - f(v))(u - v) \leq 0$ , a więc  $u - v = 0$ .  $\square$

Bardzo ciekawym zagadnieniem jest podanie warunków na  $f$  lub obszar  $\Omega$  gwarantujących nieistnienie rozwiązań. Może się to udać, jak w Przykładzie 6.1, gdzie prawa strona była specjalnej postaci. Rozpatrzmy ogólniejsze zagadnienie

$$(6.6) \quad -\Delta u = \lambda f(u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

nazywane czasami nieliniowym zagadnieniem własnym. Wykażemy, podobnie jak w Przykładzie 6.1, że przy odpowiednich założeniach o  $f$ , dla dostatecznie dużych  $\lambda$ , (6.6) nie ma rozwiązań.

Zauważmy, że do powtórzenia przeprowadzonego wcześniej rozumowania istotne jest tylko założenie  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s)/s = a > 0$ , z którego wynika istnienie takich stałych  $a, b$ , że  $f(u) \geq au + b$ . Mnożąc teraz równanie (6.6) przez pierwszą funkcję własną laplasjanu  $u_1$  i całkując po  $\Omega$  dostajemy

$$\int_{\Omega} u_1(-\Delta u) = \lambda_1 \int_{\Omega} u_1 u = \lambda \int_{\Omega} u_1 f(u) \geq \lambda \int_{\Omega} u_1 (au + b).$$

Wynika stąd, że  $(\lambda_1 - \lambda a) \int_{\Omega} u_1 u \geq 0$ , a więc warunkiem koniecznym istnienia rozwiązań jest  $\lambda < \lambda_1/a$ .

Bardzo pomocnym narzędziem w dowodach twierdzeń o nieistnieniu rozwiązań zagadnienia (6.1)–(6.2) jest tzw. tożsamość Pochożajewa.

Zacznijmy od tożsamości:

$$\int_{\Omega} \Delta u \left( \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n \frac{1}{2} x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2$$

prawdziwej dla funkcji  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\Delta u \in L^1(\Omega)$ . Całkując przez części pierwszy składnik powyższej sumy dostajemy

$$\int_{\partial\Omega} (\nu \cdot \nabla u)(x \cdot \nabla u) - \int_{\Omega} |\nabla u|^2,$$

a drugi jest równy

$$\frac{1}{2} \left( \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu |\nabla u|^2 - n \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right).$$

W rezultacie dostajemy tzw. tożsamość Rellicha

$$\int_{\Omega} \Delta u \left( \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot \nabla u)(x \cdot \nabla u) + \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu |\nabla u|^2.$$

Założmy, że  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  jest rozwiązaniem (6.1)–(6.2) z  $f \in C^0(\mathbb{R})$ . Oznaczmy przez  $F$  funkcję pierwotną  $f$ ,  $F' = f$ . Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \left( \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) &= - \int_{\Omega} f(u) \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n F'(u) x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} F(u) = n \int_{\Omega} F(u) - \int_{\partial\Omega} \nu \cdot x F(0). \end{aligned}$$

Punkt  $x \in \partial\Omega$  traktowany jako wektor, przedstawiamy w postaci

$$x = (x \cdot \nu)\nu + (x \cdot \bar{t})\bar{t},$$

gdzie  $\bar{t}$  jest wektorem jednostkowym stycznym do  $\partial\Omega$  w punkcie  $x$ . Z przedstawienia tego natychmiast dostajemy

$$x \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} = (x \cdot \nu) \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Stąd

$$\int_{\partial\Omega} (\nu \cdot \nabla u)(x \cdot \nabla u) = \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 = \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) |\nabla u|^2$$

bo  $\nabla u = \partial u / \partial \nu$  na  $\partial\Omega$ . Korzystając teraz z tożsamości Rellicha otrzymujemy *tożsamość Pochożajewa*

$$(6.7) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{(x \cdot \nu)}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 + F(0) \int_{\partial\Omega} \nu \cdot x + \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - n \int_{\Omega} F(u) = 0.$$

Znajduje ona zastosowania w dowodach twierdzeń o nieistnieniu rozwiązań pewnych klas równań w obszarach gwiaździstych. Przypomnijmy, że

**Definicja 6.4.** Obszar  $\Omega$  nazywamy *gwiaździstym* względem początku układu współrzędnych, jeśli dla każdego  $x \in \partial\Omega$ ,  $x \cdot \nu > 0$ . Jak wcześniej  $\nu$  oznacza wektor zewnętrzny normalny do  $\partial\Omega$  w punkcie  $x$ .

**Wniosek 6.5.** Jeśli  $d > (n+2)/(n-2)$  i obszar  $\Omega$  jest gwiaździsty, to zagadnienie  $-\Delta u = u^d$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  nie ma rozwiązań  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ .

*Dowód.* W naszym przypadku  $F(u) = (u^{d+1})/(d+1)$  i (6.7) ma postać

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\nu \cdot x}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 + \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - n \int_{\Omega} \frac{u^{d+1}}{d+2} = 0.$$

Z założenia gwiaździstości  $\Omega$  wynika, że pierwszy składnik powyższej sumy jest nieujemny, a więc

$$(6.8) \quad \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq n \int_{\Omega} \frac{u^{d+1}}{d+2}.$$

Mnożąc nasze równanie przez  $u$  i całkując po  $\Omega$  dostajemy

$$(6.9) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} u^{d+1}.$$

Z (6.8) i (6.9) wynika, że

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \frac{n}{d+1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2,$$

a więc  $d \leq (n+2)/(n-2)$ .  $\square$

### 7. Nielokalne zagadnienia eliptyczne

Zajmiemy się problemem istnienia (nieistnienia) rozwiązań zagadnień postaci

$$(7.1) \quad -\Delta u = M \frac{f(u)}{\int_{\Omega} f(u)}, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Zagadnienia tego typu pojawiają się w teorii elektrolitów, termistorów oraz ewolucji układów cząstek wzajemnie oddziałujących.

Z pomocą funkcji Greena przekształcamy (7.1) do postaci całkowej

$$(7.2) \quad u(x) = M\mu \int_{\Omega} G(x, y) f(u(y)) dy,$$

gdzie  $\mu = (\int_{\Omega} f(u))^{-1}$ . Prawą stronę (7.2) traktujemy jak przekształcenie przestrzeni  $C^0(\bar{\Omega})$  w siebie. Z oszacowań funkcji Greena wynika, że jest ono ciągłe i zwarte, jeśli tylko  $f$  jest funkcją ciągłą. Jeśli dodatkowo jest malejącą, dostajemy oszacowanie na normę rozwiązania

$$|u|_{\infty} \leq MC(\Omega) f(0) (f(|u|_{\infty}))^{-1}.$$

Wynika z niego, że jeśli  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) > MC(\Omega)$ , to dysponujemy oszacowaniem *a priori* rozwiązań (7.1).

Przy założeniu, że  $f$  jest funkcją rosnącą

$$|u|_{\infty} \leq MC(\Omega) f(|u|_{\infty}),$$

oszacowanie na rozwiązanie dostaniemy, jeśli tylko

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{f(z)} > MC(\Omega).$$

Aby uzyskać mocniejsze twierdzenia o istnieniu rozwiązań wykorzystamy

**Lemat 7.2.** *Jeśli  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami ciągłymi,  $f > 0$  i  $g$  jest niemalejąca, to dla każdej funkcji ciągłej  $u$*

$$(7.3) \quad \frac{\int_{\Omega} f(u)g(f(u))}{\int_{\Omega} f(u)} \geq \frac{\int_{\Omega} g(f(u))}{|\Omega|}.$$

*Dowód.* Dowód jest oczywisty, jeśli tylko zauważymy, że (7.3) jest równoważne nierówności

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} f(u(x))g(f(u(x))) dx dy - \int_{\Omega} \int_{\Omega} f(u(y))g(f(u(y))) dx dy \geq 0,$$

która może być przekształcona do postaci

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (g(f(u(x))) - g(f(u(y))))(f(u(x)) - f(u(y))) dx dy \geq 0. \quad \square$$

Wykażemy

**Twierdzenie 7.3.** *Jeśli  $f$  jest funkcją dodatnią, malejącą i ciągłą oraz*

$$\sup |f'/f| < \infty,$$

*to problem (7.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

*Dowód.* Z pomocą funkcji Greena sprowadzamy zagadnienie (7.1) do formy całkowej

$$(7.4) \quad u(x) = M\mu \int_{\Omega} G(x, y)f(u(y)) dy,$$

gdzie  $\mu = (\int_{\Omega} f(u))^{-1}$ . Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 6.3 wykorzystamy Twierdzenie Schaefera. Prawą stronę (7.2) traktujemy jak przekształcenie przestrzeni  $C^0(\bar{\Omega})$ . Nietrudno wykazać, że jest to przekształcenie ciągłe i zwarte. Wystarczy więc tylko podać oszacowania *a priori* na rozwiązania. Oczywiście jeśli  $u$  jest dowolnym rozwiązaniem, to

$$0 \leq u(x) \leq M\mu f(0) \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |G(x, y)| dy \leq MC(\Omega)\mu.$$

Ostatnia nierówność jest konsekwencją Twierdzenia 5.12. Wystarczy teraz oszacować  $\int_{\Omega} f(u)$  od dołu. Z nierówności Jensena

$$\exp\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \log f(u)\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u).$$

Problem sprowadziliśmy zatem do oszacowania od dołu  $\int_{\Omega} \log f(u)$ . Z nierówności Schwarza i założeń o  $f$  dostajemy

$$(7.5) \quad \left(\int_{\Omega} \log f(u)\right)^2 \leq C \int_{\Omega} (\log f(u))^2 \leq C \int_{\Omega} |f'/f|^2 |\nabla u|^2 \\ \leq \sup |f'/f| \int_{\Omega} |f'/f| |\nabla u|^2 \leq C \int_{\Omega} |f'/f| |\nabla u|^2.$$



Mnożąc równanie (7.1) przez  $\log f(u)$  i całkując po  $\Omega$  otrzymujemy

$$(7.6) \quad \begin{aligned} 0 &\geq - \int_{\Omega} \Delta u \log f(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 (f'/f) \\ &= M\mu \int_{\Omega} f(u) \log f(u) \geq \frac{M}{|\Omega|} \int_{\Omega} \log f(u). \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest konsekwencją Lematu 7.1 z funkcją  $g(x) = \log x$ . Z (7.5) i (7.6) wynika oszacowanie od dołu na  $\int_{\Omega} \log f(u)$ , a tym samym otrzymujemy oszacowanie aprioryczne na rozwiązania zagadnienia (7.1).

Przechodzimy do dowodu jednoznaczności rozwiązań. Załóżmy, że nasz problem ma dwa rozwiązania  $u_1$  i  $u_2$ , tzn.

$$(7.7) \quad -\Delta u_i = M\mu_i f(u_i), \quad u_i|_{\partial\Omega} = 0,$$

gdzie  $\mu_i = (\int_{\Omega} f(u_i))^{-1}$ . Rozróżnimy dwa przypadki:  $\mu_1 = \mu_2$  i  $\mu_1 \neq \mu_2$ . W pierwszym z nich jednoznaczność rozwiązań wynika z Twierdzenia 6.3. Załóżmy więc, że  $\mu_1 > \mu_2$ . Wykażemy, że wtedy  $u_1 > u_2$  w  $\Omega$ . Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieje wtedy taki punkt  $x_0 \in \Omega$ , że

$$u_1(x_0) \leq u_2(x_0) \quad \text{i} \quad -\Delta(u_1 - u_2)(x_0) \leq 0.$$

Z drugiej strony

$$-\Delta(u_1 - u_2)(x_0) = M\mu_1 f(u_1(x_0)) - M\mu_2 f(u_2(x_0)) > 0,$$

a więc otrzymujemy sprzeczność.

Z nierówności  $u_1 > u_2$  wynika, że

$$(7.8) \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \leq \frac{\partial u_2}{\partial \nu}.$$

Całkując (7.7) po obszarze  $\Omega$  dostajemy

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial \nu}.$$

Stąd i z (7.8) wynika, że

$$(7.9) \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}.$$

Z nierówności  $\mu_1 > \mu_2$  wnioskujemy, że  $\Delta(u_1 - u_2) < 0$  w pewnym otoczeniu brzegu  $\partial\Omega$ , a więc z lematu Hopfa  $\partial(u_1 - u_2)/\partial\nu < 0$  na  $\partial\Omega$ , co jest sprzeczne z (7.9).  $\square$

Jeśli  $f(u) = e^{-u}$  to rozwiązanie zagadnienia (7.1) opisuje potencjał elektryczny gazu złożonego z elektrycznie naładowanych cząstek i pozostającego w termodynamicznej równowadze. Z Twierdzenia 7.3 wynika, że stan taki istnieje i jest jednoznacznie wyznaczony. Wykażemy, że jeśli oddziaływania coulombowskie zamienimy na grawitacyjne, co odpowiada podstawieniu w prawej

stronie (7.1) funkcji  $f(u) = e^u$ , to dla dostatecznie dużych  $M$  (masy całkowitej gazu) w obszarze gwiazdzistym, zagadnienie (7.1) nie ma rozwiązań.

**Twierdzenie 7.4.** *Jeśli obszar  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest gwiazdzisty, to dla dostatecznie dużych  $M$  zagadnienie (7.1) z funkcją  $f(u) = e^u$  nie ma rozwiązań  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ .*

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy dla  $n = 3$ . W naszym przypadku tożsamość Pochożajewa ma postać

$$3M\mu \int_{\Omega} (e^u - 1) - \frac{1}{2}\mu M \int_{\Omega} ue^u = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2.$$

Rozwiązanie jest nieujemne, a więc

$$(7.10) \quad 3M \geq 3M\mu \int_{\Omega} (e^u - 1) \geq \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2.$$

Całkując równanie i wykorzystując nierówność Schwarz'a dostajemy

$$(7.11) \quad \left( \int_{\Omega} \Delta u \right)^2 = M^2 = \left( \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \leq \int_{\partial\Omega} \frac{1}{x \cdot \nu} \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2.$$

Wykorzystując (7.10) mamy

$$M^2 \leq MC(\Omega)$$

co daje warunek konieczny na  $M$ ,  $M \leq C(\Omega)$ . □

#### LITERATURA

- [1] P. BILER, T. NADZIEJA, *Problems and Examples in Differential Equations*, M. Dekker, New York, 1992.
- [2] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1998; Przekład polski, PWN, Warszawa, 2002.
- [3] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [4] QUING HAN, FANGHUA LIN, *Elliptic Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [5] H. MARCINKOWSKA, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, wyd. drugie, PWN, Warszawa, 1986.
- [6] ———, *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, PWN, Warszawa, 1993.
- [7] V. P. MIKHAILOV, *Differencialnye uravnenia v častnyh proizwodnyh*, Nauka, Moskva, 1983.
- [8] W. POGORZELSKI, *Równania całkowe i ich zastosowania*, PWN, Warszawa, 1953.
- [9] I. RUBINSTEIN, L. RUBINSTEIN, *Partial Differential Equations in Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

- [10] A. N. TICHONOV, A. A. SAMARSKI, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa, 1963.

TADEUSZ NADZIEJA  
Instytut Matematyki  
Uniwersytet Zielonogórski  
ul. Podgórna 50  
65-516 Zielona Góra

*E-mail:* T.Nadzieja@im.uz.zgora.pl



## ZAGADNIENIA EWOLUCYJNE

DARIUSZ WRZOSEK

### Spis treści

1. Wprowadzenie.
2. Operatory liniowe domknięte.
3. Podstawowe własności  $C_0$ -półgrup i ich generatorów.
4. Generatory grup operatorów liniowych ciągłych.
5. Półgrupy analityczne.
6. Równania niejednorodne.
7. Zagadnienia semiliniowe.

### 1. Wprowadzenie.

#### Związek pomiędzy operatorami domkniętymi, półgrupami i równaniami cząstkowymi parabolicznymi i hiperbolicznymi

Celem kursu jest przedstawienie zarysu ogólnej teorii, w ramach której można badać zagadnienia początkowe lub początkowo-brzegowe dla semiliniowych (półliniowych) równań różniczkowych (w skrócie r.r.cz.) typu parabolicznego lub hiperbolicznego. Podejście to polega na zapisaniu danego ewolucyjnego równania różniczkowego cząstkowego jako równania różniczkowego w odpowiednio dobranej przestrzeni Banacha. Oto przykłady ewolucyjnych równań różniczkowych cząstkowych:

**Przykład 1.1.** Półliniowe zagadnienie paraboliczne. Szukamy  $T > 0$  oraz funkcji  $u: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającej równanie

$$\partial_t u = \Delta u + f(t, u) \quad \text{w } \Omega \times (0, T),$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* H7D05, 35F10, 35F25, 35G25.

wraz z warunkiem początkowym

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dla } x \in \Omega$$

i brzegowym

$$u(x, t) = 0 \quad \text{dla } x \in \partial\Omega, t \geq 0,$$

gdzie  $\Omega$  jest obszarem w  $\mathbb{R}^d$  z gładkim brzegiem a  $\Delta$  to operator Laplace'a

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Równania tego typu pojawiają się jako modele matematyczne procesów dyfuzji i oddziaływania np. cząstek chemicznych, organizmów biologicznych czy przewodzenia ciepła.

**Przykład 1.2.** Zagadnienie Cauchy'ego (początkowe) dla półliniowego równania hiperbolicznego. Znaleźć  $T > 0$  i funkcję  $v: \mathbb{R}^d \times (0, T)$  taką, że

$$\begin{aligned} \partial_{tt} v &= \Delta v + f(v) && \text{w } \mathbb{R}^d \times (0, T), \\ v(x, 0) &= v_1(x) && \text{dla } x \in \mathbb{R}^d, \\ \partial_t v(x, 0) &= v_2(x) && \text{dla } x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

gdzie  $v_1$  i  $v_2$  są zadanymi funkcjami. Wprowadzając nową zmienną  $\bar{u} = (v, u)^T$  możemy powyższe równanie różniczkowe doprowadzić do postaci, w której występuje tylko jedna pochodna po  $t$ , a mianowicie

$$\partial_t \bar{u} = L\bar{u} + \tilde{f}(\bar{u}).$$

Wtedy

$$L\bar{u} = (u, \Delta v)^T \quad \text{oraz} \quad \tilde{f}(\bar{u}) = (0, f(v)).$$

Równania tego typu opisują zjawiska falowe np. drgania membrany lub rozcho-dzenie się fal akustycznych.

Podstawowe pytania, które się tu formułuje dotyczą

- istnienia rozwiązań lokalnych w czasie w odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych,
- jednoznaczności rozwiązań,
- regularności rozwiązań względem czasu i przestrzeni,
- możliwości przedłużenia rozwiązania dla  $t > 0$  (ew.  $t \in \mathbb{R}$ ),
- własności jakościowych rozwiązań np. asymptotyki czasowej gdy  $t \rightarrow \infty$  lub wybuchu pewnych norm rozwiązania gdy  $t \rightarrow t_{\max}$  i  $t_{\max} < \infty$ .

Zostanie tu przedstawione podejście oparte o teorię półgrup operatorów liniowych. Jeśli chodzi o kwestię istnienia rozwiązań, konkurencyjne wobec tego jest podejście oparte o tzw. metodę Galerkiną. Jest to metoda aproksymacyjna

polegająca na otrzymywaniu rozwiązań r.r.cz. jako granicy rozwiązań odpowiednich układów skończenie wielu r.r.z. w przestrzeni Banacha. Ta ostatnia metoda stosuje się do niemal wszystkich typów równań (także nieliniowych), daje jednak rozwiązania o niskiej regularności a więc niosące stosunkowo mało informacji.

Główną ideę podejścia opartego o półgrupy można przedstawić na elementarnym przykładzie. Rozważmy r.r.z. liniowe niejednorodne,  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) &= u_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

oraz równanie jednorodne

$$\begin{aligned} v'(t) &= av(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v(0) &= u_0, \end{aligned}$$

którego rozwiązanie dane jest wzorem

$$v(t) = S_t u_0 := u_0 e^{at}.$$

Mamy tu grupę przekształceń liniowych

$$S_t S_s = S_{t+s} \quad \text{dla } t, s \in \mathbb{R}, \quad S_0 = I.$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego przedstawia się za pomocą formuły uzmiennienia parametrów (wzór Duhamel'a)

$$u(t) = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-s} f(s) ds.$$

Jeśli  $f = f(u)$ , to rozwiązania poszukujemy jako punktu stałego odwzorowania:  $\tilde{u} \rightarrow T(\tilde{u})$  określonego na pewnym zbiorze  $B$ , gdzie

$$T(\tilde{u}) = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-s} f(\tilde{u}(s)) ds.$$

Podejście oparte o teorię półgrup polega właśnie na przeniesieniu tych idei z przypadku równań różniczkowych zwyczajnych na przypadek ogólnych ewolucyjnych równań różniczkowych cząstkowych. Wtedy oczywiście operatorowi mnożenia  $au$  odpowiadać powinien pewien operator eliptyczny np. operator Laplace'a

$$Au = \Delta u$$

wraz z odpowiednim warunkiem brzegowym. Ten ostatni nie jest operatorem liniowym ograniczonym w interesujących nas przestrzeniach funkcyjnych np. w przestrzeni  $L^p(\Omega)$  i to jest sytuacja typowa dla równań różniczkowych cząstkowych. Aby się o tym przekonać rozważmy równanie

$$\partial_t u = \partial_x u,$$

w przestrzeni  $L^2(\mathbb{R})$  z niewiadomą funkcją  $u = u(x, t)$ . Łatwo sprawdzić, że operator  $B = \partial_x u$  z dziedziną  $D(B) = \{v \in L^2(\mathbb{R}) : \partial_x v \in L^2(\mathbb{R})\}$ , w której przyjmujemy topologię indukowaną z  $L^2(\mathbb{R})$ , nie jest ograniczonym operatorem liniowym.

Zajmiemy się najpierw przypadkiem jednorodnego r.r.z. w przestrzeni Banacha  $X$

$$\begin{aligned} u'(t) &= Bu(t) \quad \text{w } X, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

gdzie  $B \in L(X)$ . Wtedy

$$S_t = e^{tB} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tB)^n}{n!} \quad \text{w } L(X).$$

Bezpośrednie szacowanie powyższego szeregu pozwala udowodnić poniższe fakty, które pozostawiamy jako zadania dla Czytelnika.

**Uwaga.** Zamiast określenia *operator liniowy ciągły* będziemy pisać w skrócie o.l.c. niezależnie od odmiany deklinacyjnej i podobnie zamiast *operator liniowy domknięty* napiszemy o.l.d.

**Fakt 1.** Dla  $t \in \mathbb{R}$   $S_t$  jest o.l.c.

**Fakt 2.**  $S_t$  jest grupą ciągłą w normie operatorowej dla  $t = 0$  tzn.

$$\|S_t - I\|_{L(X)} \leq t\|B\|_{L(X)} e^{t\|B\|_{L(X)}} \rightarrow 0 \quad \text{gdy } t \rightarrow 0.$$

**Fakt 3.**

$$\left\| \frac{S_t - I}{t} - B \right\|_{L(X)} \leq \|B\|_{L(X)} \max_{s \in [0, t]} \|S_s - I\|_{L(X)},$$

a stąd otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} S_t = B \quad \text{w } L(X).$$

Powyższa równość ma kluczowe znaczenie w całej teorii, gdyż wiąże grupę operatorów w przestrzeni  $X$  z pewnym równaniem różniczkowym. Zobaczymy, że w przypadku operatorów liniowych nieograniczonych, a takie nas interesują w kontekście równań różniczkowych cząstkowych, ten związek również zachodzi przy dodatkowych założeniach.

## 2. Operatory liniowe domknięte

**Definicja 2.1.** Jednoparametrową rodzinę  $S_t$ ,  $t \geq 0$ , o.l.c. nazywamy *półgrupą o.l.c.* w przestrzeni Banacha  $X$ , jeśli

$$\begin{aligned} S_0 &= I, \\ S_{t+s} &= S_t S_s \quad \text{dla } t, s \geq 0. \end{aligned}$$



**Definicja 2.2.** Operator liniowy  $A$  z dziedziną

$$D(A) = \left\{ u \in X : \text{istnieje granica } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t u - u}{t} \right\},$$

określony jako

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t u - u}{t} \quad \text{dla } u \in D(A),$$

nazywamy *generatorem (infinitesimalnym) półgrupy*  $S_t$  o.l.c.

**Oznaczenie.** W celu oznaczenia, że operator  $A$  generuje półgrupę  $S_t$  zapisujemy  $A \succ S_t$ .

**Definicja 2.3.** Półgrupę o.l.c. w  $X$  nazywamy *mocno ciągłą* w 0 (ew. *mocno ciągłą*) (ozn.  $C_0$ -półgrupą) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S_t u = u \quad \text{dla } u \in X.$$

**Przykłady i zadania.**

**Przykład 2.4.** Niech  $X = L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Określamy dla  $u \in L^p(\mathbb{R})$  i  $t \geq 0$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) półgrupę (ew. grupę) translacji

$$T_t u(x) = u(x + t).$$

**Zadanie 2.5.** Wykazać, że  $T_t$  jest  $C_0$  półgrupą wtedy i tylko wtedy gdy funkcja z  $L^p(\mathbb{R})$  jest  $L^p$ -ciągła.

**Zadanie 2.6.**  $T_t$  nie jest ciągła w 0 w normie operatorowej z przestrzeni  $L(L^p(\mathbb{R}))$ .

**Zadanie 2.7.**  $T_t$  jest  $C_0$ -półgrupą w przestrzeni funkcji ograniczonych jednostajnie ciągłych  $BUC$  ale nie jest  $C_0$  półgrupą w przestrzeni funkcji ciągłych ograniczonych  $BC$ .

**Stwierdzenie 2.8.** *Generatorem półgrupy translacji w przestrzeni  $L^2(\mathbb{R})$  jest operator*

$$Bu = \partial_x u, \quad D(B) = H^1(\mathbb{R}),$$

gdzie  $\partial_x$  oznacza pochodną dystrybucyjną będącą elementem przestrzeni  $L^2(\mathbb{R})$  a  $H^1(\mathbb{R})$  to przestrzeń Sobolewa.

*Dowód.* Do dziedziny generatora należą te funkcje  $v \in L^2(\mathbb{R})$ , dla których istnieje  $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R})$  takie, że

$$\left\| \frac{v(\cdot + t) - v}{t} - \tilde{v} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Aby scharakteryzować  $\tilde{v}$  rozpatrzmy ciąg

$$v_n = \left\{ \frac{v(\cdot + 1/n) - v}{1/n} \right\}.$$

Jest on w szczególności słabo zbieżny w  $L^2(\mathbb{R})$  do  $\tilde{v}$ . Z drugiej strony dla dowolnej funkcji  $\varphi \in C_0^\infty$  otrzymujemy

$$\int v_n(x)\varphi(x) dx = \int v(x) \frac{\varphi(x - 1/n) - \varphi(x)}{1/n} dx \rightarrow - \int v(x)\varphi'(x) dx,$$

gdy  $n \rightarrow \infty$ . Stąd  $\tilde{v} = \partial_x v$ . Występującą tu pochodną należy rozumieć w sensie dytrybucyjnym (słabym). Udowodniliśmy zatem, że  $B = \partial_x$  oraz, że  $D(B) \subset H^1(\mathbb{R})$ . Dowód inkluzji w drugą stronę pozostawiamy Czytelnikowi.  $\square$

**Przykład 2.9.** Rozważmy równanie przewodnictwa ciepła

$$\begin{aligned} \partial_t u &= d\partial_{xx}u && \text{w } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{dla } x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Rozwiązanie można otrzymać metodą Fouriera rozdzielania zmiennych (por. wykład pt. „Równania hiperboliczne”). Jeśli warunek początkowy  $u_0 \in L^2(0, \pi)$  to możemy go przedstawić w postaci rozwinięcia Fouriera

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kx.$$

Wtedy rozwiązanie dane jest wzorem

$$u(x, t) = (P_t u_0)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-\sqrt{d}k^2 t} \sin kx,$$

gdzie ciąg  $\{\sin kx\}_{k \geq 1}$  jest układem zupełnym w  $L^2(0, \pi)$ . W tym przypadku rozważamy operator

$$Au = d\partial_{xx}u$$

z dziedziną

$$D(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$$

(por. wykład pt. „Równanie Poissona”). Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że rodzina operatorów

$$P_t: L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$$

jest  $C_0$ -półgrupą o.l.c. w  $L^2(0, \pi)$ .

**Zadanie 2.10.** Uogólnienie powyższego przykładu. Wykazać, że jeśli mamy ciąg  $\lambda_k \rightarrow \infty$  i układ ortonormalny zupełny  $\{e_k\}_{k \geq 1}$  w przestrzeni Hilberta  $H$  to

$$Y_t u = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \langle u, e_k \rangle e_k, \quad t \geq 0,$$

gdzie  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznacza iloczyn skalarny w  $H$ , a  $Y_t, t \geq 0$ , określa  $C_0$ -półgrupę o.l.c. w  $H$ .

**Zadanie 2.11.** Wykazać, że generatorem półgrupy z poprzedniego zadania jest

$$Au = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, e_k \rangle e_k \quad \text{dla } u \in D(A),$$

z dziedziną

$$D(A) = \left\{ v \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k \langle v, e_k \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

Okazuje się, że generatorami  $C_0$  półgrup są operatory domknięte.

**Definicja 2.12.** Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami Banacha. Operator liniowy  $A: D(A) \rightarrow Y$ ,  $D(A) \subset X$ , nazywamy *domkniętym* gdy jego wykres jest podprzestrzenią domkniętą w  $X \times Y$ .

Z definicji wynika, że operator  $A: D(A) \rightarrow Y$  jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ciągu  $\{u_n\} \subset D(A)$ , jeśli  $u_n \rightarrow u$  oraz  $Au_n \rightarrow y$  to  $u \in D(A)$  i  $y = Au$ .

**Zadanie 2.13.** Wykazać, że  $Au = du/dx$  jest operatorem domkniętym w przestrzeni  $C([0, 1])$ .

Wskazówka: skorzystać z przedstawienia  $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(s) ds$ .

**Definicja 2.14.** Niech  $A: X \supset D(A) \rightarrow X$  będzie o.l.d. Zbiór

$$\varrho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A: D(A) \rightarrow X \text{ jest bijekcją na } X \}$$

nazywamy *zbiorem rezolwenty operatora  $A$* , a rodzinę operatorów

$$R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \varrho(A).$$

nazywa się *rezolwentą operatora  $A$* . Uzupełnienie  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$  nazywamy *spektrum (widmem) operatora*.

**Wniosek 2.15.** Z twierdzenia o wykresie domkniętym wynika, że dla dowolnego  $\lambda \in \varrho(A)$  operator  $R(\lambda : A)$  jest o.l.c.

**Zadanie 2.16.** Udowodnić następujący

**Lemat.** *Jeśli istnieje  $m > 0$  takie, że dla każdego  $u \in D(A)$*

$$\|(\lambda I - A)u\| \geq m\|u\|,$$

to  $(\lambda I - A)^{-1}$  istnieje i jest o.l.c.

**Zadanie 2.17.** Udowodnić, że jeśli  $A$  jest o.l.d. w  $X$  a  $B$  jest o.l.c. to  $A + B$  jest o.l.d.

**Zadanie 2.18.** Przy założeniach jak w poprzednim zadaniu wykazać, że superpozycja operatorów  $AB$  jest o.l.c. w  $X$  jeśli  $B: X \rightarrow D(A)$ .

Wskazówka: udowodnić, że  $AB$  jest domknięty i skorzystać z twierdzenia Banacha o wykresie domkniętym.

**Twierdzenie 2.19** (Analityczność rezolwenty). *Jeśli  $A$  jest o.l.d. i  $\lambda_0 \in \varrho(A)$  to  $B_{\lambda_0} \subset \varrho(A)$ , gdzie*

$$B_{\lambda_0} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0 : A)\|} \right\}$$

oraz

$$R(\lambda : A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0 : A)^{n+1} \quad \text{dla } \lambda \in B_{\lambda_0}$$

Szczegółowy dowód tego twierdzenia można znaleźć w [3]. Wynika z niego w szczególności, że zbiór rezolwenty jest otwartym podzbiorem płaszczyzny.

**Stwierdzenie 2.20.** *Niech  $A$  będzie o.l.d. Jeśli funkcje  $f: (a, b) \rightarrow D(A)$  oraz  $Af: (a, b) \rightarrow X$  są ciągle (całkowalne w sensie Riemanna) to*

$$A \int_a^b f(t) dt = \int_a^b Af(t) dt.$$

*Dowód.* Zapisać sumy Riemanna i skorzystać z tego, że  $A$  jest o.l.d. □

**Zadanie 2.21.** Udowodnić

**Lemat.** *Jeśli  $A$  jest o.l.d. to  $D(A)$  jest przestrzenią Banacha  $\widehat{D(A)}$  z normą*

$$\| \|u\| = \|u\| + \|Au\|, \quad u \in D(A).$$

*Jeśli  $0 \in \varrho(A)$  to norma  $\| \cdot \|$  jest równoważna  $\|u\|_A = \|Au\|$ .*

### 3. Podstawowe własności $C_0$ -półgrup i ich generatorów

Okazuje się, że ciągłość w zerze półgrupy o.l.c. w  $X$  determinuje już jej wzrost wykładniczy w normie  $L(X)$ .

**Stwierdzenie 3.1** (Oszacowanie wykładnicze). *Niech  $S_t$  będzie  $C_0$ -półgrupą w  $X$ . Wtedy istnieją liczby  $M > 0$  i  $\omega \in \mathbb{R}$  takie, że*

$$\|S_t\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

*Dowód.* Istnieje  $\delta > 0$  taka, że  $\sup_{t \in (0, \delta)} \|S_t\|_{L(X)} < \infty$  bo w przeciwnym przypadku istniałby ciąg  $t_n \searrow 0$  taki, że  $S_{t_n} \nearrow \infty$ . Z założenia jednak dla dowolnego  $x \in X$  mamy  $S_{t_n} x \rightarrow x$ . Zatem ciąg  $\|S_{t_n} x\|$  jest ograniczony dla dowolnego  $x$ . Z twierdzenia Banacha–Steinhausa istnieje  $M > 0$  takie, że  $\|S_{t_n}\|_{L(X)} < M$  co przeczy przyjętemu założeniu.

Niech zatem  $M = \sup_{t \in (0, \delta)} \|S_t\|$ . Weźmy  $k \in \mathbb{N}$  takie, że spełnione są nierówności  $k\delta \leq t \leq (k+1)\delta$ . Wtedy zachodzą nierówności

$$\begin{aligned} \|S_t\|_{L(X)} &= \|S_{t-k\delta} S_{k\delta}\|_{L(X)} \\ &\leq \|S_{t-k\delta}\|_{L(X)} \|S_{k\delta}^k\|_{L(X)} \leq MM^k \leq MM^{t/\delta} = Me^{\omega t}, \end{aligned}$$

gdzie  $\omega = \ln M/\delta$ . □

**Zadanie 3.2.** Udowodnić

**Wniosek.** Niech  $T_t$  będzie  $C_0$ -półgrupą. Wtedy  $[0, \infty) \ni t \mapsto T_t x$  jest funkcją ciągłą.

Stąd niekiedy  $C_0$ -półgrupy nazywa się półgrupami *mocno* (ew. *silnie*) *ciągłymi*.

Poniższe twierdzenie zawiera podstawowe własności półgrup i ich generatorów.

**Twierdzenie 3.3.** Niech  $T_t$  będzie  $C_0$  półgrupą, a  $A: X \supset D(A)$  jej generatorem. Wtedy

(a) Dla  $x \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_s x \, ds = T_t x.$$

(b) Dla  $x \in X$ ,  $\int_0^t T_s x \, ds \in D(A)$

$$A \left( \int_0^t T_s x \, ds \right) = T_t x - x.$$

(c) Jeśli  $x \in D(A)$  to  $T_t x \in D(A)$  dla  $t > 0$ , oraz

$$\frac{d}{dt} T_t x = A T_t x = T_t A x.$$

(d) Dla  $x \in D(A)$  zachodzi

$$T_t x - T_s x = \int_s^t T_\tau A x \, d\tau = \int_s^t A T_\tau x \, d\tau.$$

*Dowód.* Punkt (a) wynika wprost z faktu, że  $[0, \infty) \ni s \mapsto T_s x$  jest funkcją ciągłą (patrz Zadanie 3.2). By dowieść (b) zapisujemy

$$\frac{T_h - I}{h} \int_0^t T_s x \, ds = \frac{1}{h} \int_0^t (T_{s+h} x - T_s x) \, ds$$

Teraz wystarczy przejść do granicy z  $h \rightarrow 0$ .

Przejdźmy do dowodu punktu (c). Dla  $x \in D(A)$  i  $h > 0$  mamy

$$\frac{T_h - I}{h} T_t x = T_t \left( \frac{T_h - I}{h} \right) x \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} T_t A x.$$

Zatem  $T_t x \in D(A)$  oraz  $AT_t x = T_t Ax$  a więc

$$\frac{d^+}{dt} T_t x = AT_t x = T_t Ax.$$

Pozostaje pokazać, że

$$\frac{d^-}{dt} T_t x = AT_t x.$$

W tym celu zapisujemy

$$\begin{aligned} \lim_{h \searrow 0} \left( \frac{T_t x - T_{t-h} x}{h} - T_t Ax \right) &= \lim_{h \searrow 0} T_{t-h} \left( \frac{T_h x - x}{h} - Ax \right) \\ &\quad + \lim_{h \searrow 0} (T_{t-h} Ax - T_t Ax) = 0. \end{aligned}$$

Przy przejściu granicznym w pierwszym składniku w poprzedniej linii korzystamy z tego, że półgrupa jest ograniczona na zbiorach ograniczonych a w kolejnym z ciągłości półgrupy (patrz Zadanie 3.2).

Dowód punktu (d) pozostawiamy Czytelnikowi.  $\square$

Z dowodu punktu (b) wynika ważny wniosek

**Wniosek 3.4.** *Każda  $C_0$ -półgrupa ma generator.*

*Dowód.* Tak jak w punkcie (b) dowodzi się, że zbiór  $D(A)$  jest niepusty gdyż zawiera elementy postaci  $\int_0^t T_s x ds$  dla każdego  $x \in X$  i  $t > 0$ .  $\square$

**Twierdzenie 3.5.** *Jeli  $A$  jest generatorem  $C_0$ -półgrupy o.l.c. to  $\text{cl } D(A) = X$  i  $A$  jest o.l.d.*

*Dowód.* Weźmy dowolny  $x \in X$ . Z (a) i (b) Twierdzenia 3.3 mamy

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T_s x ds.$$

Wtedy  $x_t \in D(A)$  oraz  $x_t \rightarrow x$  gdy  $t \searrow 0$ . Zatem  $\text{cl } D(A) = X$ . By wykazać domkniętość operatora weźmy ciąg  $\{x_n\} \subset D(A)$  taki, że  $x_n \rightarrow x$  oraz  $Ax_n \rightarrow y$ . Wtedy z Twierdzenia 3.3(d) mamy

$$T_t x_n - x_n = \int_0^t T_s Ax_n ds.$$

Pod całką możemy przejść do granicy jednostajnie względem  $n$  i ostatecznie po przejściu do granicy w powyższej formule dostajemy

$$T_t x - x = \int_0^t T_s y ds.$$

Dzieląc przez  $t$  i korzystając z punktu (a) w Twierdzeniu 3.3 otrzymujemy, że  $x \in D(A)$ ,  $Ax = y$ .  $\square$

Poniższy rezultat odpowiada na naturalne pytanie. Czy generator (o ile istnieje) zadaje półgrupę w sposób jednoznaczny?

**Twierdzenie 3.6** (Jednoznaczność). *Jeśli  $A \succ T_t$  i  $B \succ S_t$  i  $A = B$  to  $T_t = S_t$  dla  $t \geq 0$ .*

*Dowód.* Przyjmijmy, że  $x \in D(A) = D(B)$  i wprowadźmy funkcję pomocniczą  $\varphi: \mathbb{R} \ni s \rightarrow T_{t-s}S_sx$ . Z punktu (c) Twierdzenia 3.3 wynika, że jest ona różniczkowalna. Po zrózniczkowaniu, co pozostawiamy Czytelnikowi, dochodzimy do wniosku, że  $\varphi = \text{const}$ . Skoro  $\varphi(0) = \varphi(t)$  wnosimy, że  $T_t x = S_t x$  dla  $x \in D(A)$ . Argument gęstości dziedziny  $D(A)$  pociąga za sobą tezę.  $\square$

**Definicja 3.7.** Jeśli  $\omega = 0$  to półgrupę o.l.c. nazywamy *jednostajnie ograniczoną*.

**Definicja 3.8.** Jeśli  $\omega = 0$  i  $M = 1$  to półgrupę o.l.c. nazywamy *półgrupą kontrakcji* (tzn. *nierozszerzającą*) gdy  $\|T_t\|_{L(X)} \leq 1$ .

**Uwaga 3.9.** Półgrupy kontrakcji pełnią kluczową rolę w równaniach różniczkowych cząstkowych typu parabolicznego i hiperbolicznego.

Stosunkowo łatwo sprawdzić, korzystając z Definicji 2.2 i Stwierdzenia 3.1.

**Wniosek 3.10.** *Operator  $A \succ T_t$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\omega I + A \succ S_t = e^{\omega t} T_t$ .*

Widzimy więc, że jeśli  $\|T_t\| \leq e^{\omega t}$  i  $\omega < 0$  to  $S_t$  jest półgrupą kontrakcji.

Następujące twierdzenie pochodzące od Hille i Yosidy podaje warunki konieczne i dostateczne na to, aby operator liniowy by generatorem  $C_0$  półgrupy kontrakcji o.l.c.

**Twierdzenie 3.11.** *Operator liniowy nieograniczony  $A: X \supset D(A) \rightarrow X$  jest generatorem  $C_0$ -półgrupy kontrakcji  $T_t$ ,  $t \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy*

- (a)  *$A$  jest o.l.d. i  $\text{cl}(D(A)) = X$ ,*
- (b)  *$\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$  i dla każdego  $\lambda > 0$ ,  $\|R(\lambda : A)\|_{L(X)} \leq 1/\lambda$ .*

*Szkic dowodu.* ( $\Rightarrow$ ) Domkniętość operatora  $A$  wynika z Twierdzenia 3.5. Sprawdza się, że rezolwenta operatora  $A$  jest przekształceniem Laplace'a półgrupy tzn.

$$R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x dt.$$

określonym dla  $\{\lambda : \text{re } \lambda > 0\}$ . Stąd już łatwo wynika warunek (b) oraz oszacowanie rezolwenty.

( $\Leftarrow$ ) Dowód warunku wystarczającego opiera się o tzw. aproksymację Yosidy polegającą na utworzeniu ciągu operatorów ograniczonych i konstrukcji poszukiwanej półgrupy jako granicy półgrup generowanych przez te operatory ograniczone. Określamy zatem operator ograniczony (patrz Zadanie 2.18)

$$A_\lambda := \lambda A R(\lambda : A) = A \left( I - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-1}.$$

Dowodzi się, że  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$  dla  $x \in X$  oraz, że półgrupy generowane przez  $A_\lambda$  zbiegają niemal jednostajnie do pewnej  $C_0$ -półgrupy, której generatorem okazuje się być  $A$ .  $\square$

Pełny dowód tego twierdzenia można znaleźć w wielu książkach, wspomnijmy tu tylko dwie pozycje dostępne w języku polskim [10], [5]. Z przedstawienia rezolwenty operatora  $A$  jako transformacji Laplace'a półgrupy wynika

**Wniosek 3.15.** *Jeśli  $A \succ T_t$ ,  $t \geq 0$  to  $\varrho(A) \supset \{\lambda : \operatorname{re} \lambda > 0\}$  i dla tych  $\lambda$  mamy*

$$\|R(\lambda : A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\operatorname{re} \lambda}.$$

Podobne argumenty do tych z Uwagi 3.10. prowadzą do następującego spostrzeżenia

**Wniosek 3.16.** *Jeśli  $A \succ T_t$  i  $\|T_t\|_{L(X)} \leq e^{\omega t}$ ,  $\omega > 0$  to rozpatrujemy wtedy półgrupę  $e^{\omega t} T_t = S_t$ . Wtedy  $S_t$  jest kontrakcją i otrzymujemy analogiczne sformułowanie powyższego twierdzenia z następującym oszacowaniem rezolwenty*

$$\|R(\lambda : A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\operatorname{re} \lambda - \omega}.$$

Następujące twierdzenie podaje warunki konieczne i dostateczne na to, aby operator liniowy generował półgrupę  $T_t$  spełniającą ogólne oszacowanie  $\|T_t\| \leq M e^{\omega t}$ .

**Twierdzenie 3.17** (Feller, Miyadera, Philips). *Operator liniowy  $A: X \supset D(A) \rightarrow X$  jest generatorem półgrupy o.l.c. spełniającej oszacowanie*

$$\|T_t\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{dla } \omega \in \mathbb{R}$$

*wtedy i tylko wtedy gdy*

- (a)  $A$  jest o.l.d. i  $\operatorname{cl} D(A) = X$ ,
- (b)  $\varrho(A) \supset R_\omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{re} z > \omega\}$

*oraz dla  $n = 1, 2, \dots$  zachodzi oszacowanie*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{re} \lambda - \omega)^n} \quad \text{dla } \lambda \in R_\omega.$$

Zwróćmy uwagę, że dla  $M \leq 1$  powyższe twierdzenie sprowadza się do przypadku kontrakcji z uwzględnieniem zaburzenia operatora  $A$  operatorem  $\omega I$  (por. Wniosek 3.16). Iteracja rezolwenty w oszacowaniu rezolwenty wiąże się z trikiem polegającym na przernormowaniu tak, aby w nowej równoważnej normie półgrupa była kontrakcją i można było zastosować Twierdzenie Hille–Yosidy.

**Uwaga 3.18.** Powyższe twierdzenie można odnieść do słynnego problemu Cauchy'ego poszukiwania ciągłej funkcji  $\varphi$  o wartościach zespolonych spełniającej równanie funkcyjne

$$\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s), \quad \text{dla każdego } t, s \in \mathbb{R}.$$



Wiadomo, że jedynymi rozwiązaniami są funkcje postaci  $\varphi(s) = e^{at}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Podobnie można postawić problem poszukiwania rozwiązań tego równania funkcyjnego (dla  $t, s \geq 0$ ) pośród ciągłych funkcji o wartościach w przestrzeni ograniczonych operatorów liniowych działających w pewnej przestrzeni Banacha. Twierdzenie 3.17 w połączeniu z Twierdzeniem 3.28 dają rozwiązanie tego problemu.

Warunki wystarczające a szczególnie oszacowanie rezolwenty w twierdzeniu Hille–Yosidy bywają trudne do sprawdzenia. Inne, niekiedy łatwiejsze do sprawdzenia warunki daje twierdzenie Lumera–Philipsa, które operuje pojęciem dysypatywności operatora.

Jeśli  $X$  jest przestrzenią Banacha to przez  $X^*$  oznaczamy przestrzeń do niej dualną. Działanie funkcjonału  $x^* \in X^*$  na elemencie  $x \in X$  oznaczamy przez  $\langle x, x^* \rangle$ .

**Definicja 3.19.** Dla  $x \in X$  określamy zbiór dualny  $\mathcal{F}(x) \subset X^*$  następująco

$$\mathcal{F}(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Jeśli  $X$  jest przestrzenią Hilberta to  $\mathcal{F}(x) = \{x\}$ . W ogólności  $x \mapsto \mathcal{F}(x)$  jest odwzorowaniem wielowartościowym. Aby się o tym przekonać, rozpatrzmy przestrzeń  $X = L^1(0, 1)$ . Wtedy dla  $u \in L^1(0, 1)$  mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &:= \text{sgn } u \\ &= \{v \in L^\infty(0, 1) : v = \|u\|_{L^1}(\chi_{\{u>0\}} - \chi_{\{u<0\}}) + f\chi_{\{u=0\}}; \|f\|_{L^\infty(0,1)} \leq 1\}. \end{aligned}$$

**Definicja 3.20.** Operator liniowy  $A$  jest *dysypatywny* jeśli dla każdego  $x \in D(A)$  istnieje  $x^* \in X^*$  taki, że  $\text{re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$ .

**Definicja 3.21.** Operator liniowy  $A$  jest *m-dysypatywny* jeśli jest dysypatywny i istnieje liczba  $\lambda_0 > 0$  taka, że  $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ .

Poniższe twierdzenie podaje inny niż w twierdzeniu Hille–Yosidy warunek wystarczający na to aby operator liniowy generował półgrupę kontrakcji.

**Twierdzenie 3.22** (Lumer, Philips). *Jeśli  $A$  jest operatorem liniowym w  $X$  oraz*

- (a)  $\text{cl } D(A) = X$ ,
- (b)  $A$  jest *m-dysypatywny*,

*to  $A$  jest generatorem  $C_0$  półgrupy kontrakcji o.l.c. w  $X$ .*

Dowód tego twierdzenia znaleźć można np. w [9] gdzie podany jest także warunek konieczny na to aby operator liniowy był generatorem półgrupy o.l.c.

Poniższe przykłady dotyczą zagadnień ewolucyjnych w których, dla prostoty, poszukujemy funkcji dwóch zmiennych  $(t, x)$ . Przedstawienie ogólniejszej sytuacji wiąże się z pokonaniem szeregu technicznych problemów np. dotyczących regularności brzegu obszaru i wykracza poza ramy tego wykładu. Wybrane przykłady

ilustrują najważniejsze kroki, które trzeba wykonać przy zastosowaniu przedstawianej teorii do konkretnych równań różniczkowych cząstkowych.

### Przykłady.

**Przykład 3.23.** Rozważmy zagadnienie początkowo-brzegowe dla następującego równania parabolicznego

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \partial_t u &= \partial_x(a\partial_x u) + b\partial_x + cu \quad \text{w } (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{dla } x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Zakładamy, że  $a \in C^1([0, 1])$ ,  $b, c \in C([0, 1])$ ,  $a(x) > \underline{a} > 0$  dla  $x \in (0, 1)$  oraz  $b \neq 0$ . Przez  $\|\cdot\|_\infty$  oznaczamy normę w przestrzeni  $L^\infty(0, 1)$ . Przyjmijmy  $X = L^2(0, 1)$  i określmy operator

$$\begin{aligned} D(A) &:= H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1), \\ Au &:= \partial_x(a\partial_x u) + b\partial_x u + cu \quad \text{dla } u \in D(A). \end{aligned}$$

Sprawdźmy, że operator  $A + \lambda I$  jest  $m$ -dysypatywny dla pewnego  $\lambda < 0$ . Zauważmy w tym celu, że  $C_0^\infty \subset D(A)$ . Weźmy  $u \in D(A)$  i całkując przez części oraz korzystając z nierówności Younga z „ $\varepsilon$ ” dostajemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \partial_x(a\partial_x u)u \, dx + \int_0^1 b\partial_x u \, dx + \int_0^1 c|u|^2 \, dx + \lambda \int_0^1 c|u|^2 \, dx \\ \leq -\underline{a} \int_0^1 |\partial_x u|^2 \, dx + \varepsilon \|b\|_\infty^2 \int_0^1 |\partial_x u|^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 |u|^2 \, dx \\ + \|c\|_\infty \int_0^1 |u|^2 \, dx + \lambda \int_0^1 |u|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Kładąc  $\varepsilon = \underline{a}/\|b\|_\infty^2$  i dobierając  $\lambda$  spełniające  $\lambda < -\|c\|_\infty - \|b\|_\infty^2/\underline{a}$  otrzymujemy

$$\langle Au + \lambda u, u \rangle \leq 0.$$

Trzeba teraz pokazać, że dla pewnego  $\lambda_0 > 0$

$$\operatorname{Im} \{(\lambda_0 - \lambda)I - A\} = X = L^2(0, 1),$$

albo inaczej, że dla dowolnego  $f \in L^2(0, 1)$  istnieje  $u \in D(A)$  taki, że

$$(3.2) \quad -\partial_x(a\partial_x u) - b\partial_x u - cu + (\lambda_0 - \lambda)u = f,$$

$$(3.3) \quad u(1) = u(0) = 0.$$

Dobierając  $\lambda_0$  dostatecznie duże dowodzi się stosując Twierdzenie Laxa–Milgrama (patrz [5], por. także wykład pt. „Równanie Poissona”), że istnieje dokładnie jedno słabe rozwiązanie  $u \in H_0^1(0, 1)$ . Dalej stosując teorię regularności rozwiązań zagadnień eliptycznych (patrz [5]) dowodzi się, że rozwiązanie (3.2)–(3.3)  $u \in H^2(0, 1)$ . Ostatecznie, stosując twierdzenie Lumera–Philipsa

i Wniosek 3.10, stwierdzamy, że jeśli  $u_0 \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ , to istnieje jednoznacznie wyznaczone rozwiązanie zagadnienia brzegowo-początkowego (3.1)  $u \in C^1[0, \infty) : L^2(0, 1)$ ). Zwróćmy uwagę, że w przypadku gdy  $a, b, c$  są stałymi współczynnikami, znajomość podstaw teorii równań różniczkowych zwyczajnych pozwala znaleźć rozwiązanie jawne powyższego zagadnienia brzegowego.

Powyższe rozważania można przenieść bez istotnych różnic na przypadek wielowymiarowy przyjmując zamiast odcinka  $(0, 1)$  obszar  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  z brzegiem klasy  $C^2$ . Wtedy rozpatrujemy operator eliptyczny w postaci dywergencyjnej

$$A = - \sum_{k,l=1}^d \partial_{x_k} (a_{k,l}(x) \partial_{x_l} u) - \sum_{k=1}^d b_k \partial_{x_k} u - cu,$$

z warunkiem brzegowym np. typu Dirichleta. Rozwiązalność odpowiedniego zagadnienia ewolucyjnego zapewnia tzw. warunek silnej eliptyczności: dla każdego  $x \in \Omega$  i każdego  $\xi_k, \xi_l \in \mathbb{R}$  istnieje  $C_0$  takie, że

$$\sum_{k,l=1}^d a_{k,l}(x) \xi_k \xi_l \geq C_0 |\xi|^2.$$

Aby skorzystać z teorii regularności wystarczy przyjąć, że  $a_{k,l} \in \text{Lip}(\text{cl } \Omega)$ ,  $b_k \in C(\text{cl } \Omega)$  (por. [6]).

Dodajmy, że rezultaty o generowaniu półgrup przez operatory eliptyczne zostały udowodnione dla różnych warunków brzegowych i dla rozmaitych przestrzeni funkcyjnych takich jak na przykład przestrzenie  $L^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty)$  czy  $C^{k+\alpha}(\Omega)$  (por. [1], [8], [9]).

**Przykład 3.24.** Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe

$$\partial_t v + \partial_x v = 0,$$

z warunkiem brzegowym  $v(0) = 0$ . Z równaniem związany jest operator liniowy  $Av = -\partial_x v$  z warunkiem brzegowym  $v(0) = 0$  określony dla

$$v \in D(A) = \{v \in X : v \text{ jest absolutnie ciągła na } (0, 1) \text{ oraz } v(0) = 0, \partial_x v \in X\}.$$

Przyjmijmy  $X = L^p(0, 1)$ ,  $1 < p < \infty$ , łatwo wtedy sprawdzić posługując się nierównością Höldera, że dla dowolnego  $\gamma$ ,  $v \in L^p(0, 1)$ , zbiór dualny  $\mathcal{F}(v)$  jest jednoelementowy i że wyznacza go funkcja  $v^* = \|v\|_{L^p(0,1)}^{2-p} |v|^{p-2} \in L^q(0, 1)$  gdzie  $1/p + 1/q = 1$ . Rachując sprawdzamy, że

$$\langle Av, v^* \rangle = - \frac{1}{p \|v\|_{L^p(0,1)}^{p-2}} |v(1)|^p \leq 0,$$

a więc  $A$  jest dysypatywny. Rozpatrzmy teraz równanie rezolwenty  $(\lambda I - A)v = w$ ,  $\lambda > 0$  czyli

$$\partial_x v = -\lambda v + w, \quad v(0) = 0,$$

którego rozwiązanie ma jawną postać

$$v(x) = \int_0^x e^{-\lambda(x-r)} w(r) dr, \quad x \in [0, 1].$$

Widać, że dla dowolnego  $w \in L^p(0, 1)$  tak wyrażona funkcja należy do dziedziny  $D(A)$ .

**Przykład 3.25.** Niech  $b \in \mathbb{R}_+$ ,  $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \partial_t u &= b \partial_x u & \text{dla } x \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Wtedy określamy

$$\begin{aligned} D(A) &= H^1(\mathbb{R}_+), \\ A &= b \partial_x u. \end{aligned}$$

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że  $A$  jest  $m$ -dysypatywny i  $A$  jest generatorem grupy translacji. Wtedy rozwiązanie równania przedstawia się następująco

$$(3.4) \quad T_t u_0 = u_0(x + bt), \quad u_0 \in D(A).$$

Zwróćmy uwagę, że w powyższych przykładach informacja o warunku brzegowym w zagadnieniu początkowo-brzegowym zostaje zawarta w definicji dziedziny operatora. Jest to sytuacja typowa w równaniach różniczkowych cząstkowych.

**Uwaga 3.26.** Przyjmijmy, że  $a, b, c$  w równaniu z Przykładu 3.23 są stałymi współczynnikami. Przyjmijmy dalej, że  $u(x, t)$  opisuje zagęszczenie populacji pewnych organizmów np. bakterii. Wtedy pierwszy składnik opisuje losową migrację (dyfuzję) organizmów ze współczynnikiem dyfuzji  $a$ . Drugi człon opisuje przemieszczanie się organizmów w określonym kierunku z prędkością  $b$ . Może ono być wymuszone na przykład przepływem cieczy, w której się znajdują. Ostatni człon zaś opisuje wzrost liczebności populacji uwzględniający rozmnażanie i śmiertelność ze współczynnikiem wzrostu populacji  $c$ .

**Uwaga 3.27.** Niejawny schemat różnicowy zastosowany do zagadnienia początkowego

$$(3.5) \quad \frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = x,$$

z jednej strony pokazuje jedną z możliwych aproksymacji półgrupy a z drugiej uzasadnia często stosowany zapis  $T_t = e^{At}$  dla półgrupy generowanej przez operator  $A$ . Mamy mianowicie

$$(3.6) \quad \frac{u_n(jt/n) - u_n((j-1)t/n)}{t/n} = Au_n\left(\frac{jt}{n}\right), \quad u_n(0) = x.$$

Wtedy

$$u_n(t) = \left( I - \frac{tA}{n} \right)^{-n} x.$$

Okazuje się, że dobrze znaną z analizy formułę graniczną na funkcję wykładniczą można przenieść na operatory liniowe domknięte.

**Twierdzenie 3.28.** Dla dowolnego  $x \in X$

$$T_t x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{t} R \left( \frac{n}{t} : A \right) \right)^n x := e^{At} x$$

niemal jednostajnie względem  $t$ .

Dlatego często stosuje się notację  $A \succ e^{At}$ , a powyższe równanie nazywa się formułą wykładniczą, która definiuje zarazem funkcję wykładniczą operatora generującego półgrupę o.l.c.

**Uwaga 3.29.** Warto podkreślić, że dla  $x$  spoza dziedziny  $D(A)$  zagadnienie początkowe nie ma rozwiązania chyba że uogólnimy pojęcie rozwiązania nazywając rozwiązaniem uogólnionym formułę  $u = e^{At} x$  określoną dla dowolnego  $x \in X$ . Wtedy jednak w ogólności rozwiązanie uogólnione nie spełnia samego równania różniczkowego.

W tym miejscu teoria rozwidła się na dwa przypadki. Pierwszy dotyczy sytuacji, w której półgrupa operatorów daje się rozszerzyć dla  $t < 0$  tworząc grupę. Jest to przypadek typowy dla r.r.cz. typu hiperbolicznego oraz na przypadek, gdy zagadnienie Cauchy ma rozwiązanie także dla danej początkowej  $u_0 \in X$  spoza dziedziny operatora i wtedy dla dowolnego  $t > 0$  mamy  $T_t u_0 \in D(A)$ . Jest to tak zwany efekt regularyzacji danych początkowych typowy dla r.r.cz. typu parabolicznego.

#### 4. Generatory grup o.l.c.

**Definicja 4.1.** Grupą o.l.c. w  $X$  nazywamy rodzinę operatorów spełniającą warunki

- (a)  $T_0 = I$ ,
- (b)  $T_{t+s} = T_t T_s$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ ,
- (c)  $\lim_{t \rightarrow 0} T_t x = x$  dla każdego  $x \in X$ .

**Definicja 4.2.** Operator  $A: X \supset D(A) \rightarrow X$  jest generatorem grupy operatorów jeśli istnieje granica

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}.$$

**Uwaga 4.3.** Z samej definicji wynika, że jeśli  $T_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  jest grupą o.l.c. to  $T_t$ ,  $t \geq 0$  jest półgrupą o.l.c. i  $A \succ T_t$ ,  $t \geq 0$ . Wtedy  $S_t = T_{-t}$ ,  $t \geq 0$ , jest także

$C_0$ -półgrupą z generatorem  $-A$ . Oznaczmy

$$A \succ T_t^+, \quad -A \succ T_t^-.$$

Poniższe twierdzenie mówi, że również odwrotnie, jeśli  $A \succ T_t^+$ ,  $-A \succ T_t^-$  to  $A \succ T_t$  gdzie  $T_t = T_t^+$  gdy  $t \geq 0$  oraz  $T_t = T_t^-$  gdy  $t \leq 0$ .

**Twierdzenie 4.4.** *Operator liniowy  $A: X \supset D(A) \rightarrow X$  jest generatorem grupy o.l.c. spełniającej oszacowanie  $\|T_t\| \leq Me^{\omega|t|}$  dla  $\omega \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy gdy*

- (a)  $A$  jest o.l.d. i  $\text{cl } D(A) = X$ ,
- (b)  $\varrho(A) \supset R_\omega = \{z \in \mathbb{C} : |\text{re } z| > \omega\}$

oraz dla  $n = 1, 2, \dots$  zachodzi

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(|\text{re } \lambda| - \omega)^n} \quad \text{dla } \lambda \in R_\omega.$$

Sformułowanie Twierdzenia 4.4 należy porównać z Twierdzeniem 3.17 mówiącym o generowaniu półgrupy. Widzimy, że w przypadku generatora grupy rezolwenta zawierać musi dwie rozłączne półpłaszczyzny.

**Przykład 4.5.** Dla operatora  $Au = b\partial_x u$  generującego grupę translacji, działającego w przestrzeni  $X = L^2(\mathbb{R})$  z dziedziną  $D(A) = H^1(\mathbb{R})$  mamy oszacowanie

$$\|(\lambda I - Au)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}}{|\text{re } \lambda|} \quad \text{dla } u \in L^2(\mathbb{R}), \text{ re } \lambda \neq 0,$$

co pozostawiamy Czytelnikowi do sprawdzenia. W tym przypadku  $M=1$  i  $\omega=0$ .

**Przykład 4.6.** Rozważmy zagadnienie początkowe dla układu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \sum_{j=1}^d a_j(x) \partial_{x_j} u + b(x)u, & x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

gdzie  $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ . Zakładamy, że macierze  $a_j(x)$ , dla każdego  $x \in \mathbb{R}^d$  są hermitowskie (ew. symetryczne) rzędu  $n$  oraz, że współczynniki macierzy  $a_j$  i  $b$  są dostatecznie regularne. Można udowodnić, przez bezpośrednie sprawdzenie, że jeśli przyjmą  $X = L^2(\mathbb{R}^d)^n$  to operator  $A$  zdefiniowany przez prawą stronę układu równań z dziedziną  $D(A) = H^1(\mathbb{R}^d)$  spełnia warunek: istnieje  $\beta$  taka, że jeśli  $|\text{re } \lambda|$  jest dostatecznie duże to zachodzi oszacowanie

$$\|\lambda u - Au\|_X \geq (|\text{re } \lambda| - \beta) \|u\|_X,$$

dla każdego  $u \in X$ . Szczegóły znaleźć można w [12].

**Przykład 4.7.** Równanie falowe (por. Przykład 1.2)

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u &= \Delta u, & x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \\ \partial_t u(x, 0) &= u_1(x), & x \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Równaniu falowemu odpowiada grupa  $T_t, t \in \mathbb{R}$  działająca w przestrzeni Hilberta  $H = H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ , spełniająca oszacowanie

$$\|T_t\|_{L(H)} \leq e^{|t|},$$

a więc mamy tu  $M = 1$  oraz  $\omega = 1$ . Operator  $L$  spełnia wtedy następujące oszacowanie rezolwenty

$$\|(\lambda I - L)\|_{L(H)} \leq \frac{1}{|\operatorname{re} \lambda| - 1} \quad \text{dla } |\operatorname{re} \lambda| > 1,$$

które otrzymuje się stosując transformatę Fouriera. Szczegóły można znaleźć np. w [10].

Na koniec wspomnijmy, że operator Schrödingera

$$A = i\Delta u \quad \text{gdzie } D(A) = H^2(\mathbb{R}^d), \quad (i^2 = -1)$$

występujący w mechanice kwantowej generuje grupę operatorów unitarnych (tzn.  $\|S_t\|_{L(X)} = 1$  dla  $t \in \mathbb{R}$ ) w  $L^2(\mathbb{R}^d)$  co jest wnioskiem z Twierdzenia Stone'a (por. [10]).

## 5. Półgrupy analityczne i równania paraboliczne

Okazuje się, że wspomniana własność regularyzacji związana jest z możliwością rozszerzenia analitycznego  $C_0$  półgrupy na pewien sektor w  $\mathbb{C}$  zawierający półprostą  $(0, \infty)$ .

**Definicja 5.1.** Niech  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ . Rodzinę  $T_z, z \in \Delta, T_z \in L(X)$  nazywamy *półgrupą analityczną w  $\Delta$* , jeśli

- (a)  $z \rightarrow T_z$  jest funkcją analityczną w  $\Delta$ ,
- (b)  $T_0 = I$  oraz  $T_{z_1+z_2} = T_{z_1}T_{z_2}$  dla  $z_1, z_2 \in \Delta$ ,
- (c)  $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Delta} T_z x = x$  dla  $x \in X$ .

**Założenie.** Przyjmujemy, że  $A \succ T_t$  oraz, że

- (a)  $0 \in \rho(A)$ ,
- (b) istnieje  $\text{const} > 0$  taka, że  $\|T_t\|_{L(X)} \leq \text{const}$ .

**Uwaga 5.2.** Spełnienie warunku (a) możemy zagwarantować rozpatrując operator  $A + \sigma I$  dobierając odpowiednie  $\sigma$  (por. Stwierdzenie 3.10).

**Definicja 5.3.** Operator liniowy domknięty  $A$  taki, że  $\text{cl}D(A) = X$ , nazywamy (-)wycinkowym jeśli istnieją liczby  $M > 0$  oraz  $0 < \delta < \pi/2$  takie, że

- (a)  $\varrho(A) \supset \Sigma_\delta = \{\lambda : |\arg \lambda| < \pi/2 + \delta\} \cup \{0\}$ ,
- (b)  $\|R(\lambda : A)\|_{L(X)} \leq M/|\lambda|$  dla  $\lambda \in \Sigma_\delta$ ,  $\lambda \neq 0$ .

**Uwaga 5.4.** Jeśli  $A$  jest (-)wycinkowy to  $-A$  zwany jest operatorem wycinkowym (ang. *sectorial*). To nazewnictwo jest konsekwencją dwóch konwencji istniejących w literaturze. Zgodnie z jedną z nich równanie różniczkowe zapisuje się w postaci

$$\frac{du}{dt} + Au = 0,$$

i wtedy  $A$  nazywamy wycinkowym a  $-A$  jest generatorem półgrupy. Zgodnie z drugą

$$\frac{du}{dt} = Au$$

i wtedy konsekwentnie  $A$  nazwalibyśmy (-)wycinkowym.

Poniższe twierdzenie jest kluczowe w teorii półgrup analitycznych. Wiąże ono pojęcie operatora wycinkowego (c) z analitycznością półgrupy (a) oraz, co ważne z punktu widzenia równań różniczkowych cząstkowych, z własnością regularyzacji (wygładzania) półgrupy (d)).

**Twierdzenie 5.5.** Niech  $T_t$  będzie półgrupą jednostajnie ograniczoną i  $A \succ T_t$  oraz  $0 \in \varrho(A)$ . Następujące warunki są równoważne

- (a)  $T_t$  można rozszerzyć do półgrupy analitycznej  $T_z$  w sektorze

$$\Delta_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\}$$

i  $T_z$  jest jednostajnie ograniczona w każdym domkniętym sektorze  $\Delta_{\delta'}$ , gdzie  $\delta' < \delta$ ,

- (b) istnieje stała  $C$  taka, że dla  $\sigma > 0$ ,  $\tau \neq 0$  mamy

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|},$$

- (c) operator  $A$  jest (-)wycinkowy,
- (d)  $T_t$  jest różniczkowalna w  $L(X)$  dla  $t > 0$  oraz istnieje stała  $C_\delta$  taka, że

$$\|AT_t\| \leq \frac{C_\delta}{t} \quad \text{dla } t > 0.$$

czyli, dla  $x \in X$ ,  $T_t x \in D(A)$  dla  $t > 0$ .

Dowód tego twierdzenia jest długi i dość skomplikowany, można go znaleźć w [10]. Nieco odmienne wersje tego twierdzenia z dowodami zawarte są także



w [1], [3], [4], [6]–[10], [12]. Kluczową rolę w dowodzie pełni tzw. rachunek funkcjonalny Dunforda, w ramach którego operuje się następującym przedstawieniem półgrupy

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda I + A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0,$$

gdzie  $\gamma$  jest odpowiednio dobraną krzywą zawartą w zbiorze  $\varrho(-A)$ . Twierdzenie zilustrujemy częściowo następującym przykładem.

**Przykład 5.6.** Rozważmy zagadnienie początkowe dla równania przewodnictwa ciepła

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= u_{xx} & \text{dla } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Stosując transformatę Fouriera otrzymuje się dobrze znany wzór na rozwiązanie

$$u(t, x) = T_t u_0(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y) dy.$$

Niech  $X = C_g(\mathbb{R})$  oznacza przestrzeń funkcji ciągłych mających skończone granice w  $\pm\infty$  z normą *supremum*. Określmy operator  $A_g: D(A_g) = C_g^2(\mathbb{R}) \rightarrow X$  jako  $A_g u = u_{xx}$ . Zachodzi następujące twierdzenie

**Twierdzenie 5.7.** *Spektrum operatora  $A_g$  jest zawarte w  $(-\infty, 0]$ . Jeśli  $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$  dla  $|\theta| < \pi$ , to*

$$\|R(\lambda, A_g)\|_{L(C_g(\mathbb{R}))} \leq \frac{1}{|\lambda| \cos(\theta/2)},$$

*i  $A_g$  jest generatorem półgrupy analitycznej.*

*Dowód.* Niech  $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$  dla  $|\theta| < \pi$ . Skoro równanie  $\lambda u - u'' = 0$  ma jedynie zerowe rozwiązanie w  $C_g$ , to operator  $\lambda I - A_g$  jest iniekcją. By pokazać, że jest także surjekcją połączmy  $\lambda = \mu^2$ ,  $\operatorname{re} \mu > 0$ . Przyjmijmy najpierw, że  $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_g(\mathbb{R})$  i zastosujmy transformatę Fouriera do równania rezolwenty

$$(5.1) \quad \lambda u - u'' = f.$$

W konsekwencji po zastosowaniu odwrotnej transformaty Fouriera dostaniemy dla  $x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|x-s|} f(s) ds = f * h_{\mu}(x),$$

gdzie  $h_{\mu}(x) = (1/2\mu)e^{-\mu|x|}$ . Sprawdźmy, że powyższy wzór przedstawia rozwiązanie dla  $f \in C_g(\mathbb{R})$ . W tym celu rozbijamy powyższą całkę na dwa składniki  $\int_{-\infty}^x + \int_x^{\infty}$  i różniczkując dwukrotnie otrzymujemy (5.1). Zapisując teraz

$$u(x) = \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu s} f(x-s) ds,$$

wykazujemy, że istnieją granice  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u$ . Sprawdzimy teraz oszacowanie rezolwenty. Z nierówności Younga dla splotu otrzymujemy

$$\|u\|_X = \|R(\lambda : A_g)f\|_X \leq \|h_\mu\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_X = \frac{\|f\|_X}{|\mu|\operatorname{re}\mu} = \frac{\|f\|_X}{|\lambda|\cos(\theta/2)}. \quad \square$$

**Wniosek 5.8.** *Jeśli dla pewnego  $a \in \mathbb{R}$*

$$\|T_t\|_{L(X)} \leq M_0 e^{at} \quad \text{dla } t > 0,$$

*to dla  $a' < a$  istnieje  $M_1 \geq 1$  takie, że*

$$\|AT_t\|_{L(X)} \leq \frac{M_1}{t} e^{a't} \quad \text{dla } t > 0$$

*i ogólnie, dla potęg naturalnych operatora zachodzi*

$$\|A^n T_t\|_{L(X)} \leq \frac{M_n}{t^n} e^{a't} \quad \text{dla } t > 0.$$

*Dowód.* Dowód pierwszej części jest rachunkowy i opiera się o własność (d) w Twierdzeniu 5.5 (por. [3]). Wykorzystując własność półgrupy otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|A^n T_t\|_{L(X)} &= \|(AT_{t/n})^n\|_{L(X)} \\ &\leq \|AT_{t/n}\|_{L(X)}^n \leq (M_1 t^{-1} e^{-a't/n})^n = M_n t^{-n} e^{-a't}. \quad \square \end{aligned}$$

W dalszej części tego rozdziału przyjmujemy, że operator  $A$  jest wycinkowy a więc  $-A$  spełnia warunki Definicji 5.3. Przy badaniu zagadnień semiliniowych z operatorami wycinkowymi dąży się do tego by wykazać istnienie rozwiązania tak aby z jednej strony objąć jak najszerszą klasę nieliniowych funkcji w samym równaniu a z drugiej aby zminimalizować wymagania co do regularności danych początkowych. Aby to zrealizować wprowadza się rodzinę przestrzeni Banacha pośrednich pomiędzy  $D(A)$  i  $X$ . Okazuje się, że taką rodzinę stosunkowo łatwo otrzymać biorąc dziedziny dodatnich potęg operatora wycinkowego  $A^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Przypomnijmy, że operator  $-A$  generuje półgrupę  $e^{-At}$  oraz, skoro  $0 \in \rho(-A)$ , istnieją liczby  $\gamma > 0$  i  $M$  takie, że

$$(5.2) \quad \|e^{-At}\| \leq M e^{-\gamma t}.$$

Przypomnijmy teraz własności funkcji Gamma Eulera

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{re} z > 0$$

oraz

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad 0 < \operatorname{re} z < 1.$$

Dla  $a > 0$  z samej definicji po zamianie zmiennych otrzymujemy

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-at} dt.$$

Okazuje się, że ta formuła pozwala wprowadzić definicję potęgi operatora liniowego spełniającego oszacowanie (5.2).

**Definicja 5.9.** Dla  $\alpha > 0$  definiujemy potęgę operatora wycinkowego  $A$ .

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Korzystając z (5.2) widzimy, że  $A^{-\alpha} \in L(X)$ . Korzystając z własności funkcji  $\Gamma$  dla  $\alpha \in (0, 1)$  mamy

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha \pi} \int_0^{\infty} t^{-\alpha} (tI + A)^{-1} dt.$$

Następujące własności wynikają dość łatwo z definicji

- (W1) Dla  $\alpha, \beta \geq 0$  zachodzi  $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} A^{-\beta}$ ,  $A^{-0} = I$ .
- (W2) Dla  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\|A^{-\alpha}\| \leq \text{const}$ .
- (W3) Dla każdego  $x \in X$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A^{-\alpha} x = x$ .
- (W4) Operator  $A^{-\alpha}$  jest różnowartościowy.

*Dowód (W4).* Skoro  $\varrho(A) \ni 0$ , to  $A^{-1}$  jest różnowartościowy, a więc także  $A^{-n}$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Niech  $A^{-\alpha} x = 0$ . Weźmy  $n \geq \alpha$ . Wtedy możemy zapisać  $A^{-n} x = A^{-n+\alpha} A^{-\alpha} x = 0$ . Zatem  $x = 0$ , co kończy dowód.  $\square$

Zdefiniujemy teraz dodatnią potęgę operatora.

**Definicja 5.10.** Dla  $\alpha > 0$  określamy  $A^{\alpha} := (A^{-\alpha})^{-1}$ , a dla  $\alpha = 0$  kładziemy  $A^{\alpha} = I$ .

**Wniosek 5.11.** Dla  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $A^{\alpha}$  jest operatorem domkniętym (dla  $\alpha < 0$  ograniczonym) z dziedziną  $D(A^{\alpha}) = \text{Im}(A^{-\alpha})$ .

**Twierdzenie 5.12.**

- (a) Dla  $\alpha \geq \beta > 0$  mamy  $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$ .
- (b) Dla  $\alpha \geq 0$ ,  $\text{cl} D(A^{\alpha}) = X$ .
- (c) Jeśli  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , to dla  $x \in D(A^{\gamma})$ , gdzie  $\gamma = \max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ , zachodzi

$$A^{\alpha+\beta} x = A^{\alpha} A^{\beta} x.$$

*Dowód (a) i (b).* Jeśli przedstawimy  $A^{-\alpha} = A^{-\beta} A^{-(\alpha-\beta)}$  to oczywiście  $\text{Im} A^{-\alpha} \subset \text{Im} A^{-\beta}$  a stąd (a). Można udowodnić, że  $\text{cl} D(A^n) = X$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Weźmy zatem  $\alpha \leq n$  i korzystając z punktu (a) dostajemy (b).  $\square$

Przypadek gdy  $\alpha \in (0, 1]$  ma szczególne znaczenie dla zastosowań w teorii równań różniczkowych cząstkowych.

**Wniosek 5.13.** Dla  $\alpha \in (0, 1]$  mamy  $D(A) \subset D(A^{\alpha}) \subset X$ .

Następujące twierdzenie ma kluczowe znaczenie w zastosowaniach teorii półgrup analitycznych do badania r.r.cz. typu parabolicznego. Punkt (a) mówi, że startując z dowolnego warunku początkowego w  $X$  rozwiązanie natychmiast wpada do dziedziny operatora  $A^\alpha$  a punkt (c) daje bardzo ważne oszacowanie półgrupy wykorzystywane przy badaniu zagadnień semiliniowych (patrz Część 7).

**Twierdzenie 5.14.** *Jeśli  $-A$  jest generatorem półgrupy analitycznej  $T_t$  oraz  $0 \in \varrho(A)$  to*

- (a) dla  $\alpha \geq 0$ ,  $T_t: X \rightarrow D(A^\alpha)$ ,  $t > 0$ ,
- (b) dla  $x \in D(A^\alpha)$ ,  $T_t A^\alpha x = A^\alpha T_t x$ ,
- (c) istnieją stałe  $\delta > 0$  i  $M_\alpha$  takie, że dla  $t > 0$ ,

$$A^\alpha T_t \in L(X), \quad \|A^\alpha T_t\|_{L(X)} \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},$$

- (d) jeśli  $\alpha \in (0, 1]$  i  $x \in D(A^\alpha)$  to  $\|T_t x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|$ .

*Dowód.* Dowód punktu (a) opiera się o Wniosek 5.8. Dla dowodu części (b) wystarczy przedstawić  $x \in D(A^\alpha)$  jako  $x = A^{-\alpha} y$  dla pewnego  $y \in X$ , i skorzystać bezpośrednio z Definicji 5.9. By dowieść punkt (c) zauważmy, że skoro  $A^\alpha$  jest o.l.d. to także  $A^\alpha T_t$  jest o.l.d. Z części (a) wynika, że  $A^\alpha T_t$  jest określony dla całej przestrzeni, a więc na mocy twierdzenia o domkniętym wykresie jest o.l.c. Niech  $n - 1 < \alpha \leq n$ . Korzystając z Wniosku 5.8. dostajemy

$$\begin{aligned} \|A^\alpha T_t\|_{L(X)} &= \|A^{\alpha-n} A^n T_t\|_{L(X)} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} \|A^n T_{t+s}\|_{L(X)} ds \\ &\leq \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} (t+s)^{-n} e^{-\delta(t+s)} ds \\ &\leq \frac{M_n e^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha) t^\alpha} \int_0^\infty v^{n-\alpha-1} (1+v)^{-n} dv = \frac{M_\alpha}{t^\alpha} e^{-\delta t}, \end{aligned}$$

co dowodzi punkt (c). Punkt (d) wynika z następującego oszacowania. Weźmy  $x \in D(A^\alpha)$ , wtedy oznaczając każdorazowo stałą zależną od  $\alpha$  przez  $C_\alpha$  mamy

$$\begin{aligned} \|T_t x - x\|_{L(X)} &= \left\| \int_0^t A T_s x ds \right\| = \left\| \int_0^t A^{1-\alpha} T_s A^\alpha x ds \right\| \\ &\leq C_\alpha \int_0^t s^{\alpha-1} \|A^\alpha x\| ds = C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

**Definicja 5.15.** Dla operatora wycinkowego  $A$ ,  $0 \in \varrho(A)$ , definiujemy rodzinę przestrzeni Banacha

$$X^\alpha := D(A^\alpha) = \text{Im}(A^{-\alpha}), \quad \|u\|_\alpha := \|u\|_{X^\alpha} := \|A^\alpha u\|_X$$

oraz  $X^0 = X$ ,  $X^1 = D(A)$ .

**Twierdzenie 5.16.** *Jeśli operator  $R(\lambda : A)$  jest zwarty, to włożenie*

$$D(A) \subset X^\alpha \subset X^\beta \subset \dots \subset X^0 = X, \quad 1 \geq \alpha > \beta \geq 0$$

*jest gęste, ciągłe i zwarte.*

Jest wiele rezultatów dotyczących charakteryzacji przestrzeni  $X^\alpha$  oraz ich zanurzeń w inne znane przestrzenie np. przestrzenie Sobolewa oraz przestrzenie typu  $C^{k+\alpha}$ . Poniższe przykłady obejmują podstawowe fakty.

**Przykład 5.17.**  $A = I - \Delta$ ,  $D(A) = H^2(\mathbb{R}^d)$ . Wtedy  $X^\alpha = H^{2\alpha}(\mathbb{R}^d)$  (por. [2]).

**Przykład 5.18.** Niech  $A$  będzie operatorem wycinkowym w  $L^q(\Omega)$ , gdzie  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , odpowiadającym eliptycznemu regularnemu zagadnieniu brzegowemu takiemu, że  $D(A) \subset W^{m,p}(\Omega)$ . Wtedy

$$\begin{aligned} X^\alpha &\subset W^{k,q}(\Omega) && \text{gdy } k - \frac{d}{q} < m\alpha - \frac{d}{p}, \quad q \geq p, \\ X^\alpha &\subset C^\nu(\Omega) && \text{gdy } 0 \leq \nu < m\alpha - \frac{d}{p}. \end{aligned}$$

**Przykład 5.19.** Niech  $w \in H$ , gdzie  $H$  jest ośrodkową przestrzenią Hilberta a  $A$  operatorem danym przez rozkład spektralny (por. Zadanie 2.10). Przykład ten obejmuje np. operator Laplace'a z jednorodnym warunkiem typu Dirichleta na brzegu regularnego obszaru ograniczonego w  $\mathbb{R}^d$  (patrz wykład pt. „Równanie Poissona”) a ogólniej dotyczy on operatorów samosprężonych

$$Aw = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, w \rangle e_n.$$

Wtedy

$$A^\alpha w = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha \langle e_n, w \rangle e_n, \quad D(A^\alpha) = \left\{ w \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha} |\langle e_n, w \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

## 6. Równania niejednorodne

W tej części zajmiemy się zagadnieniem początkowym dla abstrakcyjnego równania jednorodnego postaci

$$(6.1) \quad \frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad wX, \quad t > 0,$$

$$(6.2) \quad u(0) = u_0,$$

gdzie operator liniowy  $A$  jest generatorem  $C_0$ -półgrupy. Biorąc pod uwagę rozważania z Części 1 nie jest zaskakujące, że pojęcie rozwiązania (6.1)–(6.2) wprowadza się w oparciu o formułę Duhamela. Zobaczmy, że w odróżnieniu od r.r.z.

ciągłość funkcji  $f$  nie wystarcza do tego aby przejść od formuły Duhamela do rozwiązania dostatecznie regularnego tak aby spełniało równanie (6.1). Dlatego, oprócz rozwiązania *całkowego* spełniającego formułę Duhamela wprowadza się pojęcia rozwiązania *klasycznego* i *silnego*.

**Definicja 6.1.** Niech  $-A$  będzie generatorem  $C_0$ -półgrupy o.l.c. Przyjmijmy  $x \in X$  i  $f \in L^1(0, T : X)$ . Funkcję  $u \in C([0, T] : X)$  nazywamy *rozwiązaniem całkowym* (6.1)–(6.2) (ang. *mild solution*), jeśli spełnia równanie całkowe

$$u(t) = T_t x + \int_0^t T_{t-s} f(s) ds \quad \text{dla } t \in [0, T].$$

**Uwaga 6.2.** Przestrzeń Banacha  $L^1(0, T : X)$  zawiera funkcje określone na odcinku  $[0, T]$  o wartościami w przestrzeni Banacha  $X$  i całkowalne w sensie Bochnera. Kompendium wiedzy o całce Bochnera znaleźć można na przykład w [3] i [5]. Najogólniej mówiąc jest to przeniesienie koncepcji całki Lebesgue'a na przypadek funkcji o wartościami w przestrzeni Banacha.

Poniższe stwierdzenie można wykazać z łatwością posługując się powyższą definicją i Stwierdzeniem 3.1.

**Stwierdzenie 6.3.** *Jeśli  $(u_0, f)$  i  $(v_0, g)$  należące do  $X \times L^1(0, T : X)$  stanowią parę danych w (6.1)–(6.2), to istnieje stała  $K_T$  zależna od  $T$  taka, że*

$$\|u - v\|_{C([0, T] : X)} \leq K_T (\|u_0 - v_0\|_X + \|f - g\|_{L^1(0, T : X)}).$$

**Uwaga 6.4.** Konsekwencją tego stwierdzenia jest bardzo ważna w równaniach różniczkowych własność ciągłości rozwiązania w zależności od danych oraz jednoznaczność rozwiązania. Te cechy prawdopodobnie wyjaśniają nazewnictwo angielskie (*mild solution*) i tym bardziej francuskie (*bonne solution*). Własność ta ma także kluczowe znaczenie przy aproksymacji rozwiązań oraz przy dowodzeniu istnienia rozwiązania zagadnień semiliniowych. Warto podkreślić, że rozwiązanie całkowe jest zadane dla dowolnego warunku początkowego w  $X$  niekoniecznie z  $D(A)$ . Przyjmując  $f \equiv 0$  i biorąc dla przykładu półgrupę translacji łatwo podać przykład, dobierając odpowiednio warunek początkowy, rozwiązania całkowego które nie spełnia samego równania różniczkowego.

Poniższy przykład (por. [10]) ilustruje fakt, że mimo założenia ciągłości  $f$  startując z warunku początkowego z  $D(A)$  rozwiązanie całkowe nie jest dość regularne by spełniało (6.1).

**Przykład 6.5.** Weźmy  $u_0 \in D(A)$ . Wybierzmy  $y \in X$  tak aby  $T_t y$  nie należało do  $D(A)$  dla wszystkich  $t \geq 0$  i połóżmy  $f(s) = T_s y$ . Oczywiście  $f \in C([0, T] : X)$ . Zgodnie z definicją rozwiązanie całkowe odpowiadające  $u_0 = 0 \in D(A)$  ma postać

$$u(t) = \int_0^t T_{t-s} T_s y ds = t T_t y.$$

Przy założeniu przyjętym o  $y$  nie jest to funkcja różniczkowalna.

Inną bardzo ważną w równaniach cząstkowych własnością rozwiązania całkowego jest zachowywanie porządku. Przyjmijmy, że  $X = L^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty)$  oraz, że półgrupa generowana przez operator  $A$  zachowuje naturalny porządek w  $X$  lub innymi słowy zachowuje stożek dodatni w  $X$  tzn. zbiór

$$X_+ = \{v \in X : v \geq 0 \text{ p.w. w } \Omega\}.$$

Takie pogrupy związane są typowo z zagadnieniami parabolicznymi. Do tego aby półgrupa zachowywała porządek wystarcza aby rezolwenta operatora miała tę własność. Rzeczywiście jeśli  $f \in X_+$  pociąga za sobą, że  $u = R(\lambda, A)f \in X_+$ , to stosując formułę wykładniczą z Twierdzenia 3.28 wnosimy, że  $T_t$  również zachowuje  $X_+$  dla  $t \geq 0$ . Stąd otrzymujemy

**Wniosek 6.6.** *Zalóżmy, że półgrupa  $T_t$  zachowuje stożek dodatni w  $X = L^p(\Omega)$ . Zalóżmy dalej, że  $u_{0,1}, u_{0,2} \in X$  oraz  $f_1, f_2 \in L^1(0, T : X)$ . Przyjmijmy także, że  $u_1, u_2$  są odpowiednio rozwiązaniami (6.1). Jeśli  $u_{0,2} \geq u_{0,1}$  oraz  $f_2 \geq f_1$  to  $u_2 \geq u_1$  na  $\Omega \times [0, T]$ .*

*Dowód.* Wystarczy zapisać dla  $t \in [0, T]$

$$u_2(t) - u_1(t) = T_t(u_{0,2} - u_{0,1}) + \int_0^t T_r(f_2(t-r) - f_1(t-r)) dr \quad \square$$

Tego typu rezultat znany jest w teorii równań różniczkowych cząstkowych jako twierdzenie porównawcze, które zwykle otrzymuje się jako wniosek z zasady maksimum. Twierdzenia tego typu wykorzystuje się także w zagadnieniach semiliniowych np. w celu udowodnienia nieujemności rozwiązań.

Zdefiniujemy teraz pojęcie rozwiązania klasycznego.

**Definicja 6.7.** Funkcję  $u: [0, t) \rightarrow X$  nazywamy *rozwiązaniem klasycznym* (6.1) jeśli jest ciągła na  $[0, T)$  i różniczkowalna w sposób ciągły na  $(0, T)$ . Ponadto  $u(t) \in D(A)$  dla  $t \in (0, T)$  oraz  $u$  spełnia (6.1)–(6.2).

**Uwaga 6.8.** W powyższej definicji i dalej mówiąc o różniczkowalności funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha mamy na myśli istnienie pochodnej Frecheta.

Nietrudno udowodnić, że może istnieć co najwyżej jedno rozwiązanie klasyczne oraz, że każde rozwiązanie klasyczne, o ile istnieje, jest rozwiązaniem całkowym. Oto kilka zadań.

**Zadanie 6.9.** Udowodnić poprzez bezpośrednie sprawdzenie następujący fakt. Jeśli  $f \in C^1([0, T] : X)$ , to rozwiązanie całkowite (6.1)–(6.2) startujące z  $u_0 \in D(A)$  jest rozwiązaniem klasycznym.

Następne zadanie sprowadza poszukiwanie rozwiązania do sprawdzenia czy prawa strona jest różniczkowalna w odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej.

**Zadanie 6.10.** Przyjmując  $X = L^2(0, \pi)$  i korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że następujące zagadnienie początkowo-brzegowe ma rozwiązanie klasyczne

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= x \sin t && \text{dla } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{w } H^2(0, \pi), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0. \end{aligned}$$

**Zadanie 6.11.** Wykazać, że jeśli  $-A$  jest generatorem półgrupy analitycznej i  $f \equiv f_0 \in X$  to dla dowolnego  $x \in X$  rozwiązanie całkowite (6.1)–(6.2) jest rozwiązaniem klasycznym.

Na koniec sformułujemy definicję rozwiązania silnego, które najkrócej rzecz ujmując spełnia równanie różniczkowe prawie wszędzie w  $[0, T]$ . O zasadności tego pojęcia można się przekonać rozpatrując (6.1)–(6.2) i kładąc  $A = 0$  oraz  $X = \mathbb{R}^1$ . Widzimy wtedy, że

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s) ds$$

nie jest w ogólności funkcją różniczkowalną jeśli przyjmiemy  $f \in L^1(0, T)$ . Po zróżniczkowaniu widzimy jednak, że  $u$  spełnia (6.1) prawie wszędzie w  $[0, T]$ .

**Definicja 6.12.** Funkcję  $u: [0, t] \mapsto X$  różniczkowalną prawie wszędzie i taką, że  $du/dt \in L^1(0, T : X)$  nazywamy *rozwiązaniem silnym* zagadnienia (6.1)–(6.2) jeśli  $u(0) = u_0$  i  $t \in (0, T)$  oraz  $u$  spełnia (6.1) prawie wszędzie w  $(0, T)$ .

**Uwaga 6.13.** Można udowodnić, że jeśli funkcja  $f$  ma pochodną prawie wszędzie oraz  $f \in L^1(0, T : X)$ , to dla dowolnego  $x \in D(A)$  rozwiązanie całkowite jest także rozwiązaniem silnym zagadnienia (6.1)–(6.2). Przykładem funkcji o tej własności są funkcje spełniające warunek Lipschitza

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_X \leq L|t_1 - t_2| \quad \text{dla } t_1, t_2 \in [0, T],$$

gdzie  $L > 0$  jest pewną stałą. Zwróćmy tu uwagę, że znane z analizy twierdzenie Rademachera o różniczkowalności prawie wszędzie funkcji spełniających warunek Lipschitza przenosi się na funkcje o wartościach w przestrzeni Banacha o ile jest to przestrzeń refleksywna.

**Uwaga 6.14.** Jeśli założymy, że operator  $A$  jest generatorem półgrupy analitycznej to wykorzystując oszacowanie w punkcie (d) z Twierdzenia 5.5. Można pokazać, że jeśli  $f \in L^1(0, T : X)$  oraz spełniony jest lokalnie warunek Höldera na  $(0, T]$ , tzn.

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_X \leq C|t_1 - t_2|^\alpha \quad \text{dla } t_1, t_2 \in [0, T]$$

dla pewnej stałej  $C > 0$  oraz  $\alpha \in (0, 1]$ , to dla dowolnego  $x \in X$  rozwiązanie całkowite (6.1)–(6.2) jest rozwiązaniem klasycznym.



### 7. Zagadnienia semiliniowe

W tej części zobaczymy w jaki sposób teoria zarysowana w poprzednich częściach daje się wykorzystać do badania zagadnień semiliniowych postaci

$$(7.1) \quad \frac{du}{dt} + Au = F(t, u), \quad \text{w } X, \quad t > 0,$$

$$(7.2) \quad u(t_0) = u_0.$$

Można bez trudu dowieść następujące twierdzenie korzystając z twierdzenia o kontrakcji.

**Twierdzenie 7.1.** *Przyjmijmy, że operator  $-A$  jest generatorem  $C_0$ -półgrupy o.l.c.  $S_t$  w  $X$  oraz, że  $F$  jest funkcją ciągłą względem  $t$  oraz spełniającą jednostajnie warunek Lipschitza względem  $x \in X$ . Wtedy zagadnienie (7.1)–(7.2) ma dokładnie jedno rozwiązanie całkowite  $u \in C([t_0, T] : X)$  zadane formułą*

$$(7.3) \quad u(t) = S_{t-t_0}u_0 + \int_{t_0}^t S_{t-s}F(s, u(s)) ds \quad \text{dla } t \in [t_0, T].$$

*Dowód.* Ustalmy warunek początkowy  $u_0 \in X$  i zdefiniujmy przekształcenie

$$\Xi: C([t_0, T] : X) \rightarrow C([t_0, T] : X)$$

następująco

$$(\Xi u)(t) = S_t u_0 + \int_{t_0}^t S_{t-s}F(s, u(s)) ds \quad \text{dla } t \in [t_0, T].$$

Punkt stały przekształcenia  $\Xi$  jest zatem poszukiwanym rozwiązaniem. Znajdujemy go metodą iteracyjną. Weźmy  $u, v \in C([t_0, T] : X)$ . W pierwszym kroku mamy

$$\|\Xi u(t) - \Xi v(t)\|_X \leq K(t - t_0)\|u - v\|_{C([t_0, T]:X)}, \quad t \in [t_0, T],$$

gdzie  $K$  jest stałą zależną od  $\sup_{t \in [t_0, T]} \|S_t\|_{L(X)}$ , oraz stałej Lipschitza. W  $n$ -tym kroku iteracji dostajemy

$$\|\Xi^n u - \Xi^n v\|_{C([t_0, T]:X)} \leq \frac{(KT)^n}{n!} \|u - v\|_{C([t_0, T]:X)}$$

i tak aż do  $n = n_0$ , dla którego  $(KT)^{n_0}/n_0! < 1$ . Wtedy  $\Xi^{n_0}$  jest kontrakcją i pozostaje zastosować twierdzenie Banacha. Jednoznaczność rozwiązania wynika z zastosowania w typowy sposób nierówności Gronwalla.  $\square$

**Uwaga 7.2.** Podobnie do przypadku równań różniczkowych zwyczajnych jeśli  $F$  spełnia lokalnie jednostajny warunek Lipschitza, tzn. dla dowolnego  $t_p$  i  $r > 0$  istnieje stała  $L(t_p, r)$  taka, że

$$\|F(t, u) - F(t, v)\|_X \leq L(t_p, r)\|u - v\|_X,$$

dla dowolnych  $u, v$  z kuli  $B(0, r)$  i  $t \in [0, t_p]$ , to można udowodnić istnienie rozwiązania całkowego określonego na pewnym przedziale  $[t_0, t_{\max})$ . Co więcej, jeśli  $t_{\max} < \infty$ , to

$$\lim_{t \nearrow t_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

W tym celu pokazuje się, że można tak dobrać  $t_1 > t_0$ , że odwzorowanie  $\Xi$  przekształca kulę w przestrzeni  $C([t_0, t_1], X)$  o dostatecznie małym promieniu zależnym od  $\|u_0\|_X$  w siebie. Dalej dowód sprowadza się do przypadku Twierdzenia 7.1, gdyż w tej kuli  $L(t_p r) < \infty$ .

**Uwaga 7.3.** Twierdzenia o regularności dla zagadnień semiliniowych opierają się o wykorzystanie odpowiednich rezultatów dla równania niejednorodnego. Jeśli  $u_0 \in D(A)$  i  $F$  jest różniczkowalna w sposób ciągły na  $[t_0, T] \times X$ , to rozwiązanie całkowite po żmudnych rachunkach okazuje się być również różniczkowalne w sposób ciągły i w tym miejscu wystarczy już tylko skorzystać z Zadania 6.9. Istnienie rozwiązania silnego zagadnienia (7.1)–(7.2) opiera się o następujący lemat

**Zadanie 7.4.** Udowodnić poprzez bezpośrednie sprawdzenie

**Lemat 7.5.** *Jeśli  $F$  spełnia warunek Lipschitza w postaci*

$$(7.4) \quad \|F(t_1, u) - F(t_2, v)\|_X \leq L(|t_1 - t_2| + \|u - v\|_X),$$

dla  $t_1, t_2 \in [t_0, T]$  i  $u, v \in X$  gdzie  $L$  jest ustaloną stałą, to rozwiązanie  $u$  zagadnienia (7.1)–(7.2) spełnia warunek Lipschitza na  $[0, T]$ .

Stąd i z Uwagi 6.13 wynika już

**Wniosek 7.6.** *Jeśli  $u_0 \in D(A)$  oraz  $F$  spełnia (7.4) to rozwiązanie całkowite (7.1)–(7.2) jest rozwiązaniem silnym.*

Przejdziemy teraz do zagadnień, w których operator  $-A$  w (7.1)–(7.2) jest generatorem półgrupy analitycznej. W kontekście równań różniczkowych cząstkowych jest to przypadek semiliniowych równań parabolicznych. Dzięki wprowadzeniu przestrzeni ułamkowych można na ogół dopuścić szerszą klasę funkcji nieliniowych niż poprzednio. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, wybór przestrzeni ułamkowej w powiązaniu z twierdzeniami o włożeniu (por. Przykład 5.18) winien być taki, by z jednej strony uchwycić nieliniowości pojawiające się w równaniu a z drugiej dopuścić jak najszerszą klasę danych początkowych. Przyjmujemy dalej dla uproszczenia, że funkcja  $F$  nie zależy jawnie od  $t$  a więc rozpatrujemy przypadek autonomiczny. Zakładamy dalej, że dla pewnego  $\alpha \in [0, 1)$  odwzorowanie

$$(7.5) \quad F: X^\alpha \rightarrow X \quad \text{spełnia lokalnie warunek Lipschitza.}$$

Ze względu na wyodrębnienie rodziny przestrzeni  $X^\alpha$  wprowadza się w tym przypadku pojęcie  $X^\alpha$ -rozwiązania.

**Definicja 7.7.** Jeśli  $u_0 \in X^\alpha$  dla  $\alpha \in [0, 1)$  to  $X^\alpha$ -rozwiązaniem zagadnienia (7.1)–(7.2) nazywamy rozwiązanie klasyczne określone na pewnym odcinku  $[0, T)$ , które spełnia dodatkowo warunek

$$u \in C([0, T) : X^\alpha).$$

Dowód następującego twierdzenia jest długi i żmudny choć jego sformułowanie wydaje się być dość naturalne (por. [3], [8]–[10]).

**Twierdzenie 7.8.** *Jeśli  $u_0 \in X^\alpha$  i  $\alpha \in [0, 1)$  oraz  $F$  spełnia (7.5), to istnieje dokładnie jedno maksymalne  $X^\alpha$ -rozwiązanie  $u$  określone na  $[0, T_{\max})$  tzn.*

$$T_{\max} = \infty \quad \text{lub} \quad \limsup_{t \nearrow T_{\max}} \|u\|_{X^\alpha} = \infty.$$

Można udowodnić, że  $X^\alpha$ -rozwiązanie zależy w sposób ciągły od warunku początkowego z przestrzeni  $X^\alpha$ .

**Zadanie 7.9.** Wykazać istnienie rozwiązania  $u: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  następującego zagadnienia brzegowo-początkowego

$$(7.6) \quad u_t - \Delta u = f(u) \quad \text{w } \Omega \times (0, T),$$

$$(7.7) \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

$$(7.8) \quad u(0, t) = 0,$$

gdzie  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  jest obszarem ograniczonym z gładkim brzegiem.

Przyjmujemy, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia lokalnie warunek Lipschitza. Ustalmy, że  $X = L^2(\Omega)$ , a więc  $Au = \Delta u$  dla  $u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , lub w tym przypadku równoważnie  $D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ . Rozpoczynamy od znalezienia  $\alpha$  takiego aby funkcja

$$F: X^\alpha \ni u \mapsto F(u) \in X$$

zadana jako  $F(u)(x) = f(u(x))$  spełniała (7.5). W tym celu sprawdzamy z twierdzenia o włożeniu (patrz Przykład 5.18), że dla  $\alpha \in [3/4, 1]$  zachodzi  $X^\alpha \subset C(\Omega)$ . Następnie zauważamy, że jeśli  $u, v \in X^\alpha$  i  $\max\{\|u\|_{X^\alpha}, \|v\|_{X^\alpha}\} \leq K$ , to

$$\|f(u) - f(v)\|_\infty \leq L(K)\|u - v\|_{X^\alpha}.$$

Korzystając z włożenia  $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , stwierdzamy, że jeśli

$$\max\{\|u\|_{X^\alpha}, \|v\|_{X^\alpha}\} \leq K,$$

to istnieje stała  $L_1$  zależna od  $L(K)$  i  $|\Omega|$  taka, że dla  $u, v \in X^\alpha$ ,

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_1\|u - v\|_{X^\alpha}.$$

Podsumowując korzystając z Twierdzenia 7.8 otrzymaliśmy istnienie i jednoznaczność lokalnego w czasie rozwiązania dla  $u_0 \in X^\alpha$ ,  $\alpha \in [3/4, 1]$ .

Zauważmy na koniec, że nie wykorzystując konsekwencji faktu iż półgrupa generowana przez  $-A$  jest analityczna, a więc dysponując tylko Twierdzeniem 7.1 ewentualnie rezultatem wspomnianym w Uwadze 7.2, nie możemy w ogólności nie stwierdzić o istnieniu rozwiązania zagadnienia (7.6)–(7.8). Łatwo sprawdzić, że wtedy odwzorowanie  $F$  nie jest na ogół dobrze określone jako odwzorowanie z  $L^2(\Omega)$  w siebie (sprawdźmy np. dla  $f(u) = u^2$ ).

Aby przedstawić typowe wykorzystanie własności operatorów ułamkowych przytoczymy tu wraz z dowodem twierdzenie o istnieniu globalnego rozwiązania zagadnienia (7.1)–(7.2) (por. [3]) przy założeniu, że istnieje stała  $K$  taka, że funkcja  $F$  jest subliniowa tzn. dla  $t \geq 0$  i  $v \in X^\alpha$

$$\|F(v)\|_X \leq K(1 + \|v\|_{X^\alpha}).$$

Poniższe twierdzenie dotyczy istnienia rozwiązania globalnego w czasie tzn. określonego na całej półprostej  $[0, \infty)$ . Najczęściej w praktyce w celu uzyskania tego typu rezultatu wykorzystuje się specyficzne własności równania lub układu równań. Podobnie do przypadku równań różniczkowych zwyczajnych oszacowanie subliniowe prawej strony pozwala udowodnić istnienie rozwiązania globalnego w czasie. Najpierw przytoczymy lemat o kluczowym znaczeniu, którego dowód (nietrywialny) znaleźć można np. w [2].

**Lemat 7.10.** *Niech  $\theta, \alpha \in [0, 1)$ ,  $a \geq 0$ ,  $b > 0$  i niech  $y: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą spełniającą nierówność*

$$y(t) \leq \frac{a}{t^\theta} + b \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} y(s) ds.$$

Wtedy

$$\sup_{t \in [0, T)} t^\theta y(t) \leq K(a, b, \theta, \alpha, T),$$

gdzie  $K(a, b, \theta, \alpha, T)$  jest funkcją ciągłą rosnącą względem  $T$ .

**Twierdzenie 7.11.** *Przy założeniu, że  $A$  jest operatorem wycinkowym, funkcja  $F$  w zagadnieniu (7.1)–(7.2) spełnia (7.5) oraz (7.9), istnieje  $X^\alpha$ -rozwiązanie (7.1)–(7.2) określone na  $[0, \infty)$ .*

*Dowód.* Z Twierdzenia 7.8 wiemy, że istnieje rozwiązanie lokalne w czasie startujące z  $u_0$ . Przyjmijmy, że  $-A \succ S_t$ . Każdą stałą zależną tylko od ustalonych parametrów  $\alpha$ ,  $K$ ,  $T_{\max}$  lub  $\|u_0\|$  i niezależną od  $t$  oznaczamy poniżej przez  $C$ . Załóżmy, że  $T_{\max}$  jest pewną liczbą dodatnią. Zatem dla  $t \in [0, T_{\max})$  mamy

$$u(t) = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-s} F(u(s)) ds.$$

Działając operatorem  $A^\alpha$ , korzystając z Wniosku 5.11 i Twierdzenia 5.14, szacując otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{X^\alpha} &\leq \|S_t\|_{L(X)} \|u_0\|_{X^\alpha} + \int_0^t \|A^\alpha S_{t-s}\|_{L(X)} \|F(u(s))\|_X ds \\ &\leq C \|u_0\|_{X^\alpha} + C \int_0^t \frac{e^{-a(t-s)}}{(t-s)^\alpha} (1 + \|u(s)\|_{X^\alpha}) ds, \end{aligned}$$

dla  $t \in [0, T_{\max})$ . Połóżmy  $v(t) = \|u(t)\|_{X^\alpha}$ . Wiemy z definicji  $X^\alpha$ -rozwiązania, że  $v$  jest funkcją ciągłą na  $[0, T_{\max})$  oraz, że  $v$  spełnia nierówność typu Voltery a mianowicie

$$v(t) \leq \gamma + \beta \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\beta} v(s) ds$$

dla  $t \in [0, T_{\max})$ , gdzie odpowiednio

$$\gamma = C \left( 1 + \int_0^{T_{\max}} \frac{e^{-a(t-s)}}{(t-s)^\beta} ds \right), \quad a, \beta = C.$$

Korzystając z lematu otrzymujemy, że  $\sup_{t \in [0, T_{\max})} v(t) \leq C$ , co przeczy przyjętemu założeniu a więc rozwiązanie jest określone dla wszystkich  $t > 0$ .  $\square$

Jeśli dane zagadnienie ma globalne rozwiązanie w przestrzeni  $X^\alpha$ , to rodzina rozwiązań  $u(t, u_0)$  zadaje w  $X^\alpha$  w naturalny sposób ciągłą półgrupę ciągłych przekształceń i dalej można już formułować dla niej pojęcia i problemy typowe dla teorii układów dynamicznych np. poszukiwać zbiorów granicznych dla trajektorii i globalnych atraktorów etc. (patrz [2], [8]).

**Uwagi końcowe.** Przedstawiliśmy zarys teorii półgrup w kontekście jej zastosowań do równań różniczkowych cząstkowych. Omówimy teraz krótko dalsze uogólnienia tej teorii. Przede wszystkim należy wspomnieć o zagadnieniach nieautonomicznych postaci

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + A(t)u &= f(t), \quad \text{w } X, \text{ dla } t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

gdzie  $A(t)$ ,  $t \geq 0$  jest zadaną rodziną operatorów liniowych. Rozwiązaniem odpowiedniego problemu jednorodnego jest tzw. proces czyli dwuparametrowa rodzina  $U(t, s)$ ,  $t \geq s \geq 0$  operatorów ograniczonych w  $X$ . Przy odpowiednich założeniach o rodzinie  $A(t)$ ,  $t \geq 0$ , dowodzi się analogiczne twierdzenia jak w teorii półgrup (patrz [1], [6], [8], [10], [12]). Zagadnienie nieautonomiczne jest pierwszym krokiem w dowodzie istnienia rozwiązania równania quasiliniowego

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + A(u)u &= f(u), \quad \text{w } X, \text{ dla } t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

w którym rodzina operatorów liniowych zależy od niewiadomej funkcji  $u$  (por. [1], [6], [8], [10], [12]). Aby podać przykład rozważmy równanie dyfuzji z dyfuzją zależną od gęstości tzn.

$$u_t = d(u)\Delta u, \quad d(\xi) > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Tu z kolei mamy dwa przypadki, pierwszy gdy dziedziny operatorów  $A$  są tą samą przestrzenią i drugi trudniejszy gdy dziedziny zmieniają się wraz ze zmianą rozwiązania.

Historyczną kontynuacją przedstawionej tu teorii półgrup jest teoria operatorów monotonicznych (ew. akretywnych) i półgrup nieliniowych. Stawia się w niej podobne pytania jak w teorii półgrup liniowych. Jest rzeczą zadziwiającą, że niektóre metody z teorii liniowej np. aproksymacja Yosidy dają się przenieść również na teren teorii półgrup nieliniowych. Przykładami zagadnień, do których stosuje się teoria półgrup nieliniowych są równanie filtracji (ośrodka porowatego)

$$u_t = \Delta u^p, \quad u \geq 0 \quad \text{dla } p > 1,$$

i równanie zdegenerowanej dyfuzji

$$u_t = \operatorname{div}|\nabla u|^{p-2}u, \quad p \geq 2.$$

Operator nieliniowy po prawej stronie zwany jest  $p$ -laplasianem.

Na koniec chcę podkreślić, że oprócz zaprezentowanej tu metody półgrupowej w nieliniowych ewolucyjnych równaniach różniczkowych cząstkowych stosuje się też inne metody np. metody aproksymacyjne typu Galerkina lub oparte na twierdzeniach porównawczych. Zaletą metody półgrupowej jest jej elegancja i abstrakcyjne sformułowanie. Bardzo często trudno jest sprawdzić czy dane konkretne zagadnienie spełnia założenia niezbędne by teoria zadziałała, ale jeśli już je spełnia, to teoria daje bardzo wiele informacji.

Literatura przedmiotu jest już bardzo obszerna. Niżej podane referencje obejmują najważniejsze pozycje książkowe i wraz z cytowanymi w nich pracami dają pełny przegląd literatury o zastosowaniu teorii półgrup liniowych w równaniach różniczkowych cząstkowych.

#### LITERATURA

- [1] H. AMANN, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, vol. I, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [2] J. W. CHOLEWA, T. DŁOTKO, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, London Mathematical Soc. Lecture Notes Ser. 278, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [3] R. CZAJA, *Differential Equations with Sectorial Operators*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2002.
- [4] K.-J. ENGEL, R. NAGEL, *One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equation Equations*, Grad. Texts in Math., vol. 194, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [5] L. S. EVANS, *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, 2002.

- [6] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [7] D. GILBARG, N. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [8] D. HENRY, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [9] A. LUNARDI, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [10] A. PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [11] W. RUDIN, *Analiza Funkcyjna*, PWN, Warszawa, 2001.
- [12] H. TANABE, *Equations of Evolution*, Pitman, London, 1979.

DARIUSZ WRZOSEK  
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki  
Uniwersytet Warszawski  
ul. Banacha 2  
02-097 Warszawa

*E-mail:* darekw@mimuw.edu.pl





## PODZIĘKOWANIA

W imieniu Centrum Badań Nieliniowych im. J. Schaudera pragnę serdecznie podziękować wszystkim, którzy wnieśli wkład w organizację i przebieg warsztatów z równań różniczkowych cząstkowych.

Przede wszystkim gorąco dziękuję Panu Profesorowi Piotrowi Bilerowi, którego opieka merytoryczna oraz organizacja naukowa nadały charakter i wysoki poziom warsztatów.

Wyrażam słowa uznania i podziękowania Panom Profesorom Grzegorzowi Karchowi, Tadeuszowi Nadziei oraz Dariuszowi Wrzaskowi za piękne wykłady oraz przybliżenie słuchaczom trudnej tematyki równań różniczkowych cząstkowych.

Serdecznie dziękuję Panu Dziekanowi Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, Profesorowi Adamowi Jakubowskiemu za pomoc i życzliwość w trakcie organizacji i przebiegu warsztatów.

Kieruję też słowa podziękowania do uczestników warsztatów, którzy licznie przybyli do Torunia z wielu krajowych ośrodków matematycznych.

Dziękuję wreszcie Panu mgr Mariuszowi Czerniakowi, który pomagał mi we wszystkich pracach organizacyjnych.

Na zakończenie pozwalam sobie wyrazić nadzieję, że inicjatywa organizacji warsztatów będzie obecna w dalszej działalności Centrum Badań Nieliniowych na rzecz popularyzacji oraz podnoszenia kwalifikacji młodych kadr naukowych.

Kierownik Centrum Badań Nieliniowych  
im. Juliusza Schaudera

*Prof. dr hab. Lech Górniewicz*

Toruń, 31 maja 2003 r.



## INDEKS

- $C_0$ -półgrupa, 105
- charakterystyka, 8
- część główna, 23
- dane początkowe, 8
- dyfuzja fal, 15
- dyspersja, 23
- dziedzina operatora, 21
- ekwipartycja energii, 28
- energetyczny iloczyn skalarny, 21
- energia, 11
- funkcja Greena, 90
- funkcja Tichonowa, 42
- generator (infitezymalny) półgrupy, 105
- generator grupy operatorów, 117
- harmoniki sferyczne, 19
- jądro ciepła, 39
- jądro Gaussa–Weierstrassa, 39
- jądro gaussowskie, 39
- jądro wygładzające, 72
- klasa Schwartza, 37
- klasyczne rozwiązanie, 74
- laplasjan funkcji, 67
- linia węzłów, 19
- liniowa teoria rozpraszania, 27
- macierz rozpraszania, 27
- metoda entropijna, 55
- metoda Fouriera, 17, 28
- metoda kinetyczna, 55
- metoda zstępowania, 12
- mocna zasada maksimum, 88
- momenty, 11
- nieliniowa teoria rozpraszania, 27
- nierówność Cauchy’ego–Schwarza, 10
- nierówność Jensena, 96
- obszar gwiazdzisty, 94
- obszar wpływu, 9
- obszar zależności, 9
- odwrotna transformata Fouriera, 38
- operator domknięty, 107
- operator dysypatywny, 113
- operator eliptyczny, 23
- operator falowy, 27
- operator hiperboliczny, 24
- operator liniowy ciągły, 104
- operator liniowy domknięty, 104
- operator  $m$ -dysypatywny, 113
- operator rozpraszania, 27
- operator Schroedingera, 24
- operator wycinkowy, 120
- potencjał warstwy podwójnej, 81
- potencjał warstwy pojedynczej, 81
- potęga operatora wycinkowego, 123
- powierzchnia charakterystyczna, 24
- półgrupa analityczna, 119

- półgrupa jednostajnie ograniczona, 111  
 półgrupa kontrakcji, 111  
 półgrupa mocno ciągła, 105, 109  
 półgrupa mocno ciągła w 0, 105  
 półgrupa nierozszerzająca, 111  
 półgrupa o.l.c., 104  
 półgrupa silnie ciągła, 109  
 przestrzeń energetyczna, 21  
 przykład Hadamarda, 26  
 przykład Kowalewskiej, 25  
 Lewy'ego, 24
- rezolwenta operatora, 107  
 rodzina rozwiązań typu biegnącej fali, 26  
 rozwiązania stacjonarne, 54  
 rozwiązanie całkowite, 126  
 rozwiązanie fizyczne, 43  
 rozwiązanie fundamentalne, 81  
 rozwiązanie fundamentalne równania falowego, 15  
 rozwiązanie klasyczne, 126, 127  
 rozwiązanie klasyczne zagadnienia Cauchy'ego, 15  
 rozwiązanie niefizyczne, 43  
 rozwiązanie silne, 126, 128  
 rozwiązanie słabe, 22  
 równania Maxwella, 10, 29  
 równanie Bessela, 19  
 równanie ciepła, 33  
 równanie Eulera–Lagrange'a, 11, 20  
 równanie Helmholtza, 18  
 równanie Kleina–Gordona, 27  
 równanie Kortwega–de Vriesa, 23  
 równanie Liouville'a, 26  
 równanie Sine–Gordona, 26
- słaba pochodna, 75  
 słaba zasada maksimum, 34, 87  
 słaba zasada minimum, 35  
 słabe rozwiązanie, 82
- spektrum operatora, 107  
 splot funkcji, 38  
 stany stacjonarne, 54  
 szereg Fouriera, 18
- ślad funkcji, 80  
 średnie sferyczne, 13
- tłumione równanie falowe, 21  
 tożsamość Pochożajewa, 93  
 tożsamość Rellicha, 93  
 transformacja Fouriera, 15  
 transformata Fouriera, 36  
 twierdzenia Weyla–Hörmandera, 20  
 twierdzenie Cauchy'ego–Kowalewskiej, 26  
 twierdzenie Greena, 32  
 twierdzenie Holmgrena, 26
- widmo operatora, 107  
 własność średniej, 72  
 wypukła nierówność typu Sobolewa, 62  
 wzory Greena, 69  
 wzór d'Alemberta, 8, 9  
 wzór Duhamela, 103  
 wzór Gaussa, 69  
 wzór Kirchoffa, 12  
 wzór na całkowanie przez części, 68  
 wzór Poissona, 12
- zagadnienie Cauchy'ego, 8, 12, 36  
 zagadnienie dobrze postawione, 26  
 zagadnienie dobrze postawione w sensie Hadamarda, 36  
 zagadnienie Goursata, 28  
 zagadnienie na wartości własne, 18  
 zasada Duhamela, 16  
 zasada Huygensa, 16  
 zasada minimaksowa, 20  
 zbiór dualny, 113  
 zbiór rezolwenty operatora, 107