Egzamin kwalifikacyjny na
studia doktoranckie matematyki
4.06.2004

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 6 punktów. Spośród poniższych 10 zadań cztery najsłabiej rozwiązane lub nierozwiązane nie będą brane pod uwagę przy końcowej ocenie.

1. Nośnikiem permutacji $\sigma \in S_n$, gdzie S_n jest grupą permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, nazywamy zbiór tych $x \in \{1, 2, \dots, n\}$, dla których $\sigma(x) \neq x$. Uzasadnij, że dwa cykle w S_n o różnych, lecz nierozłącznych nośnikach nie są przemienne.

2. (1) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie pierwiastkiem wielomianu $f \in \mathbb{R}[x]$. Udowodnij, że a jest jednokrotny wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(a) \neq 0$.

(2) Niech $f \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem stopnia n, mającym wyłącznie rzeczywiste pierwiastki. Uzasadnij, że na to, aby dowolnie blisko f (w sensie bliskości współczynników) istniał wielomian $g \in \mathbb{R}[x]$ stopnia n, mający nierzeczywiste pierwiastki, potrzeba i wystarcza, by f miał pierwiastek wielokrotny.

3. Rozważmy współrzędne geograficzne na sferze o promieniu 1. Przyjmujemy, że szerokość geograficzna to liczba z przedziału $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, zaś długość geograficzna jest z przedziału $[-\pi, \pi]$.

Znajdź długość linii na tej sferze, biegnącej od bieguna południowego do północnego w taki sposób, że szerokość geograficzna jest stale równa długości geograficznej. Wynik przedstaw w postaci całki oznaczonej funkcji jednej zmiennej z możliwie uproszczonym wyrażeniem podcałkowym.

4. Niech a_n będzie ciągiem zbieżnym do liczby rzeczywistej a. Uzasadnić, że

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!} = a.$$

5. Funkcja $F(p)$ jest ciągła i dodatnia na kwadracie $D = [0,1] \times [0,1]$. Niech $M = \sup_{p \in D} F(p)$. Udowodnij, że

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(\int_D F(p)^{\alpha} dp \right)^{\frac{1}{\alpha}} = M.$$

6. Niech $\prec$ będzie relacją dobrego porządku na zbiorze X (tzn. $\prec$ jest relacją porządku liniowego, w którym każdy niepusty podzbiór zbioru X ma element najmniejszy). Załóżmy, że $f : X \to \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że, dla dowolnych $x, y \in X$, jeżeli $x \prec y$, to $f(x) \leq f(y)$. Udowodnić, że jeśli X jest nieprzeliczalny, to

(1) funkcja f nie jest różnowartościowa

oraz

(2) istnieje liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że $f^{-1}[\{t\}]$ jest zbiorem nieprzeliczalnym.

7. Niech $X = C_b([0,\infty))$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych, ograniczonych z $[0,\infty)$ w $\mathbb{R}$ z metryką supremum $\rho(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \geq 0\}$.

(1) Wykazać, że przestrzeń X nie jest ośrodkowa.
(2) Udowodnić, że jeśli Y jest podprzestrzenią przestrzeni X, złożoną z tych funkcji $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, dla których istnieje granica $\lim_{t\to\infty} f(t)$, to Y jest ośrodkowa.

8. Każda paczka chrupek pewnego rodzaju zawiera małą plastikową zabawkę. Jest c różnych typów tej zabawki i do każdej paczki z jednakowym prawdopodobieństwem wkładana jest jedna z nich. Każdego dnia kupujesz jedną paczkę chrupek, by zdobyć znajdującą się w niej zabawkę-niespodziankę.

(1) Policz średnią liczbę dni między momentami zdobycia w ten sposób j-tego nowego typu zabawki a $(j+1)$-go nowego typu.
(2) Policz, ile średnio dni potrzebujesz, by zgromadzić w ten sposób wszystkie rodzaje zabawek.
(3) Wyobraź sobie, że interesuje Cię zdobycie jednej szczególnej zabawki. Kupując chrupki przez n dni, nie udało Ci się jej znaleźć. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będziesz musiał kupować chrupki jeszcze co najmniej przez następne n dni?

9. Niech ciąg zmiennych losowych X_n będzie zbieżny według prawdopodobieństwa do zmiennej losowej X.

(1) Udowodnij, że jeśli ciąg liczbowy $\{c_n\}$ jest zbieżny do c, to ciąg zmiennych losowych $c_n X_n$ jest zbieżny wg prawdopodobieństwa do zmiennej losowej cX.
(2) Udowodnij, że jeśli $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to ciąg zmiennych losowych $g(X_n)$ jest zbieżny wg prawdopodobieństwa do zmiennej losowej $g(X)$.
(3) Załóżmy dodatkowo, że zmienne losowe X_n, $n = 1, 2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład ze średnią μ i skończoną wariancją σ^2. Wykaż, że dla każdego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j - \mu^2\right| > \epsilon\right\} = 0.$$

10. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru $\theta \in \mathbb{R}$ na podstawie n-elementowej próby pochodzącej z rozkładu Laplace'a o gęstości

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

.