Trójkąt Pascala i wzór dwumianowy Newtona

Definicja 1. (Trójkąt Pascala) Tworzymy poniższy nieskończony trójkąt liczbowy, w którym na bokach występują liczby 1, a każda liczba wewnątrz trójkąta jest sumą dwóch stojących bezpośrednio nad nią.

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1\\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1\\
1 \quad 11 \quad 55 \quad 165 \quad 330 \quad 462 \quad 462 \quad 330 \quad 165 \quad 55 \quad 11 \quad 1\\
1 \quad 12 \quad 66 \quad 220 \quad 495 \quad 792 \quad 924 \quad 792 \quad 495 \quad 220 \quad 66 \quad 12 \quad 1\\
1 \quad 13 \quad 78 \quad 286 \quad 715 \quad 1287 \quad 1716 \quad 1716 \quad 1287 \quad 715 \quad 286 \quad 78 \quad 13 \quad 1\\
1001 \quad 2002 \quad 3003\\
3003 \quad 5005\\
8008
\end{array}$$

Wiersze numerujemy liczbami całkowitymi zaczynając od zera, a w każdym wierszu elementy są również numerowane kolejnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi.

I tak w wierszu numer 4 występują liczby 1, 4, 6, 4, 1, które mają odpowiednio numery 0, 1, 2, 3, 4.

Sprawdź, że liczba 1001 jest liczbą numer 4 w wierszu numer 14.

Liczbę stojącą zgodnie z taką numeracją w n-tym wierszu na k-tej pozycji oznaczymy przez $\binom{n}{k}_{TP}$.

Wobec tego $\binom{4}{2}_{TP}=6$ oraz $\binom{14}{4}_{TP}=1001$.

Definicja 2. (Kombinatoryczna) Przez $\binom{n}{k}_{K}$ oznaczymy liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

Na przykład zbiór 4-elementowy, powiedzmy $\{1,2,3,4\}$, ma 6 podzbiorów 2-elementowych: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$.

Wobec tego $\binom{4}{2}_{K}=6$.

Definicja 3. (Wzór z silniami) Przyjmiemy

$$\binom{n}{k}_{W}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\,.$$

Na przykład

$$\binom{14}{4}_{W}=\frac{14!}{4!\cdot 10!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{24}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{2\cdot 12}=7\cdot 13\cdot 11=1001\,.$$

Podane wyżej trzy definicje są równoważne, to znaczy

$$\binom{n}{k}_{TP} = \binom{n}{k}_{K} = \binom{n}{k}_{W}$$

i wiedząc to, będziemy pisać po prostu $\binom{n}{k}$ bez żadnych indeksów.

Wzór dwumianowy Newtona:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\,.$$

Na przykład dla $n=5$ bierzemy współczynniki z piątego wiersza trójkąta Pascala i piszemy:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\,.$$

Podstawowe własności współczynników dwumianowych:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2!}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4!}$$

i ogólnie (w liczniku mamy iloczyn k kolejnych liczb poczynając od n i idąc w dół):

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Powyższy wzór ma praktyczne zastosowanie, gdy k jest małą konkretną liczbą. Dzięki niemu możemy pominąć rytuał wypisywania wzoru z silniami i wykonywania uproszczeń tychże silni.

Czym jest $\binom{5}{7}$? Czy ma to sens? Definicja kombinatoryczna mówi: Jest to liczba 7-elementowych podzbiorów zbioru 5-elementowego. Czyli tak: Bierzymy zbiór 5-elementowy. Wypisujemy wszystkie jego 32 podzbiory. Przy każdym podzbiorze piszemy liczbę jego elementów. Zliczamy, ile razy pojawiła się liczba 7. Definicja i procedura kombinatorycznego wyliczenia są jak najbardziej poprawne, więc $\binom{5}{7}$ ma sens. Tyle że jego wartość jest równa 0. Co do trójkąta Pascala, to można się umówić, że tak naprawdę mamy dolną półpłaszczyznę liczbową wypełnioną w większości zerami, a niezerowe liczby tworzą trójkąt, Pascala właśnie. Definicję z silniami obronić trudniej (chociaż na siłę też można), bo $\binom{5}{7}=\frac{5!}{7!\cdot(-2)!}$ zawiera $(-2)!$, któremu nie można nadać sensu liczbowego. Możemy jednak przyjąć, że definicja z silniami służy do wyliczenia $\binom{n}{k}$, gdy jest to niezerowe, czyli gdy $0\leqslant k\leqslant n$.

Zastosowanie wzoru dwumianowego do $(1+1)^n$ daje:

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}.$$

Zapamiętaj: Suma wyrazów n-tego wiersza trójkąta Pascala jest równa 2^n.

Z kolei zastosowanie wzoru dwumianowego do $(1-1)^n$ daje:

$$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n},$$

skąd wynika, że suma co drugiego wyrazu n-tego wiersza trójkąta Pascala jest równa połowie sumy wszystkich wyrazów, czyli 2^{n-1}:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\binom{n}{7}+\ldots=2^{n-1}.$$

Powyższe sumy pozornie mają nieskończenie wiele składników, ale gdy wyjdziemy poza trójkąt Pascala, składniki te są zerowe, więc tak jakby ich nie było. Jednak dzięki temu nie musimy pisać, czym jest ostatni składnik sumy — byłoby to trochę niewygodne, bo musiałoby uwzględniać parzystość liczby n.

Zapamiętaj:
Suma co drugiego wyrazu n-tego wiersza trójkąta Pascala jest równa 2^{n-1}.